序

在关于“教数学同时要教证明方法”的文章中，作者写道：“不能用一种容易理解的方式教授证明，已在数学各科的教学中使学生和教师感到困扰”. 所有具有数学教学经验的人和大多数具有学习经验的人都承认，要正确和完整地弄懂数学证明，对学生来说困难太大了. 许多学生往往采用回避的办法来躲开这个困难——依赖没有证明题的考试. 这种考试是学生和教师之间的一种默契，虽然它使师生双方都可以避免某些由于学生不精通证明而造成的不愉快后果，但它改变不了这样的事实：证明是数学中的一个重要的组成部分，也是数学的最大特征，而它却没有列入学生的训练计划之中.

索罗(Solow)博士认为，将证明系统化可以教会学生理解证明的本质. 在这本小册子中，他用丰富的图表和例子表明他的看法是令人信服的. 我以为，他的看法值得重视和研究，更值得进行实验. 他的主要目的之一是教学生怎样阅读教科书中出现的证明. 当然，这些证明并没有以系统化了的方式出现在教科书中. 因此，尤其值得注意的是——特别在两个附录中——他教读者怎样从简略叙述的证明中认识数学论证的标准要素.

与传统算法在初等算术中的作用进行类比是恰当的. 重要的是要求精通它们，理解为什么它们这样进行，对什么样的问题它们有效和能被应用. 人们已经了解了所有这一切，所以会在实际生活中创造性地进行计算(没有计算器时更是如此). 作者主张对待证明也应这样. 当理解和分析了证明的

结构之后，你将会弄懂并理解在课本中碰到的简略叙述的证明，并且最终作出自己的证明．索罗博士并不要求数学家有意识和严格地运用“顺推-倒推法”等方法给出证明．他提出通过将证明系统化的方法来教授证明，比起现行的方法（多少有点靠偶然并且基本上是希望学生自己能学到这些困难的技巧）要好得多．

大家都应该赞同索罗博士的这种意见，我国（指美国——译者注）学生在他的学习过程中开始掌握数学证明的思想方法太晚了．开始学习这些思想方法的合适时期，应该不晚于8年级（这也许多少会有一些不同意见）．当然，大学和专科教师将他们自身的失败归因于学生专科前教育的缺陷而原谅自己，这也是不对的．

今天，数学已被普遍地承认是一门基本的和重要的学科，因为它在现代生活中无处不起作用．为了有效地利用它，必须确切地理解它的方法．否则，在试图利用数学时，我们将使自己充当（没有适应性的）机器人的角色，且会把过重的负担加在我们天生就有缺陷的记忆中．对于怎样理解和掌握数学证明这个问题，索罗博士已经给出了许多想法．许多学生在今天并没有很好地理解证明，但用索罗博士的方案来补救这种令人很不满意的状况，是值得满怀希望地试一试的．

D. 博蒙特学院教授 P. 希尔登

俄亥俄州克利夫兰市

凯斯·韦斯顿·利赛弗大学

致 学 生

在完成了我的学士学位的学业之后，我开始想知道，学理论数学为什么会这样困难. 在我大学毕业后的工作过程中，我领悟到数学具有各种策略，其中之一是它的规则有一部分是隐蔽的. 像下棋那样，你首先要知道移动棋子的全部规则. 许多学生由于不掌握这样的规则，他们为抽象数学所苦恼就不足为奇了.

这本小册子叙述了一些规则，这些规则可在理论数学的策略中使用. 根据我的经验，这些规则实际上对任何人都能有所启发，并且在高中数学中就已经见过，因而是能够学会的. 学会这些规则之后，在学习抽象数学时将会大大地节省时间和少受挫折. 我希望这本小册子能够帮助你达到这个目的.

对下棋来说，你必须首先学习各个棋子怎样移动. 只有当移动棋子的规则进入你的下意识之后，你的智力才能转而集中于战略、战术以及其它类似的更富于创造性的策略上. 数学也是这样. 困难的工作是要求你首先学会在这本小册子中提出的基本规则. 事实上，你的目标应当是掌握这些材料使之成为你的第二天性. 此后，你将发现你的精力就能够集中在数学的创造性方面了. 这些规则不能代替创造性，这本小册子也无意讲授创造性. 但是我相信，它能提供表现你的创造性所需要的工具. 同样重要的是，这些工具将使你有能力去理解和鉴别别人的创造性.

你将要学习数学思想方法的一个关键部分. 像学习教材

和解题一样，要自觉地进行独立思考，提出问题和寻求解答.须知，有问题就提出才是聪明的.

D. 索罗

1981, 6　俄亥俄州克利夫兰市

致教师

不能用一种容易理解的方式教授证明，已在数学各科的教学中使学生和教师感到困扰．其结果挫伤了学生，也挫伤了教师，长此以往还常常使学生只有模仿某些极少量具体材料的能力，或者以学生在数学理解上有缺陷为理由来保护他们通过考试．

有人认为，多数学生是不可能理解抽象数学的，但我的经验表明情况与此相反．所缺少的似乎是阐明理论数学的适当方法．这本小册子叙述了掌握证明的一些通用方法．由于这些方法是对实际证明中反复使用的各种方法(在学生水平上)通过解释、概括和一般化而得出的，因而教师好教，学生能学．

学生一旦掌握了这些方法，便可以将任何证明理解为是应用这些方法的结果．之所以能这样做，是因为学生在这本书中已经学过怎样进行加工和补充．

像本书的例子那样，依照证明所用的方法来叙述证明并不困难．本书在每一个"简练"了的证明之前都有一个证明的概要，这个概要是从方法论和思想方法上来叙述的，并且也说明了所用的方法．用这种方式来讲授证明比起在证明的每一个步骤之前提出它所用的方法和为什么用这个方法并没有什么更多的要求．

在课堂上讨论证明时，我主动让学生参加，请他们选择证明方法和写出证明．我为他们的见解和提出的问题感到惊喜．我有这样的经验，一旦学生掌握了证明方法，他们的志趣就会专门致力于数学的重要之处，如为什么证明是数学的独

特方法以及为什么数学的这一部分是第一重要的. 这本小册子并不打算讲授创造性，但我相信，它叙述了许多必需的基本方法. 学生一旦掌握了这些方法，便可以解放思想，使之集中到创造性上. 我还发现，对水平不高的学生，用这种方法教他们较深的数学知识也是可能的.

总之，任务是清楚的. 主要的目的是将抽象数学变成对学生是可懂的和有兴趣的，同时也为你提供一种给学生们讲授的方法。

D. 索罗

1981, 6　俄亥俄州克利夫兰市

目　录

1. 关于证明

数学家的目的是发现和表达某些真理．数学家使用的是数学语言，证明是将数学真理表达给其他人的方法，这些人"说"的也是这种语言．数学语言的显著特点是它的严谨性．一个严格叙述出来的证明不应该含糊不清，也就是不应该对它的正确性产生怀疑．遗憾的是，在教科书和杂志的文章中出现的许多证明却并没有完整地叙述出来．不过对已经了解数学语言的人来说，只要求证明的叙述有适当的完整性就行了．因此，为了理解和叙述证明，你必须学习新的语言和新的思想方法．这本小册子讲述了许多你必需的基本"语法"．如象学习任何别的新语言一样，只有掌握了这些基本"语法"，你的新语言才会说得流畅．

这本小册子对用于证明的各种方法给予了分类和解释，目的之一是教你用统一的方法去读懂已经写出来的证明．你学会之后，就能够独立地去学习几乎所有的数学科目，这本身就是一个理想的目标．

这本小册子的另一个目的是教你对已知的数学真理给出你自己的证明．正如在任何语言中，同一个思想可有许多表达方法一样，同一个数学事实也可以有不同的证明．本书讲述的证明方法是指导你怎样开始以至怎样完成证明．因此，本书不但讲述证明的方法，也讲述每一个方法在什么情况下才能使用和怎样使用．一般来说，一个恰当的证明方法是根据所考虑的问题的结构选择出来的．所以，在你试图作出自己的证明之前，要学会自觉地选择证明方法，以节省时间．你

对自己的思考过程理解得越深，作得就越好.

当然，最终的目的是运用你学到的方法和语言去发现和表述未知的数学真理. 虽然这个目的是美好的，但实现它却非常困难. 通向这个目的的第一步是达到这样的水平，就是能够读懂证明和对已知数学事实给出自己的证明. 这样你就能更深入和更有趣味地理解数学的广泛内容了.

在前十一章中叙述了有关证明的基本方法. 第十二章则是总结. 后面的两个附录讲述多种方法综合运用的例子.

这本小册子是写给具有良好的高中数学知识的读者的，对于过去已学过这些证明方法的优秀学生，可以在读完前两章后跳到总结那一章，再接着读两个附录，以了解怎样进行整体综合. 总结这章的其余部分，讲述的是能够应用这些证明方法的各种情况.

已知两个命题 A 和 B，其中每一个既可以是真的也可以是假的，数学中的重要问题是指明：如果 A 是真的，那么 B 也是真的，而证明是完成这个任务的正规方法. 在本书后面的各章中，将根据 A 和 B 的各种形式指出进行证明的各种方法. 下面是一些命题的例子.

(1) 平面内两条不同直线或者平行或者相交于唯一的一点.

(2) $1=0$.

(3) $3x=5$ 并且 $y=1$.

(4) x 不大于零.

(5) 存在一个角 t，使得 $\cos t=t$.

可以看出，命题(1)是真的，命题(2)是假的，而命题(3)和(4)要根据变量的值而确定其真假.

命题(5)是真的，但这并不明显，所以必须用一个方法来“证明”这个命题是真的. 换句话说，数学证明就是用数学语

言叙述出来的令人信服的理论根据. 因此，证明包含的数学事实应该详细到使阅读证明的人所信服. 例如，当命题(5)的证明是提供给数学教授时，可以用不比图1更多的事实就够了. 反之，对于高中学生来说，就应该要求相当详细，恐怕甚至要从余弦函数的定义开始. 缺少足够的细节常常会使读者在阅读证明和理解证明中遇到困难. 本书的目的之一就是教你读懂这种"简练"了的证明，这种证明经常在教科书和其它数学文章中出现.

为了做出证明，你必须确切地理解所谓证明"如果 A 是真的，那么 B 也是真的"究竟是什么意思. 命题 A 通常叫做"假设"，命题 B 通常叫做"结论". 为简洁起见，命题"如果 A 是真的，那么 B 是真的"可简写成"若 A 则 B"或"A 推出 B". 数学家在书写上往往好偷懒，他们已经提出了许多"简化"记号. 例如数学家经常用"$A \Rightarrow B$"来代替"A 推出 B". 在大多数情况下，教科书并不用这些记号，但教师却常常采用，而最终你也会发现用它们是很方便的. 因此，本书将出现一些适当的记号，但在证明中不使用它们.

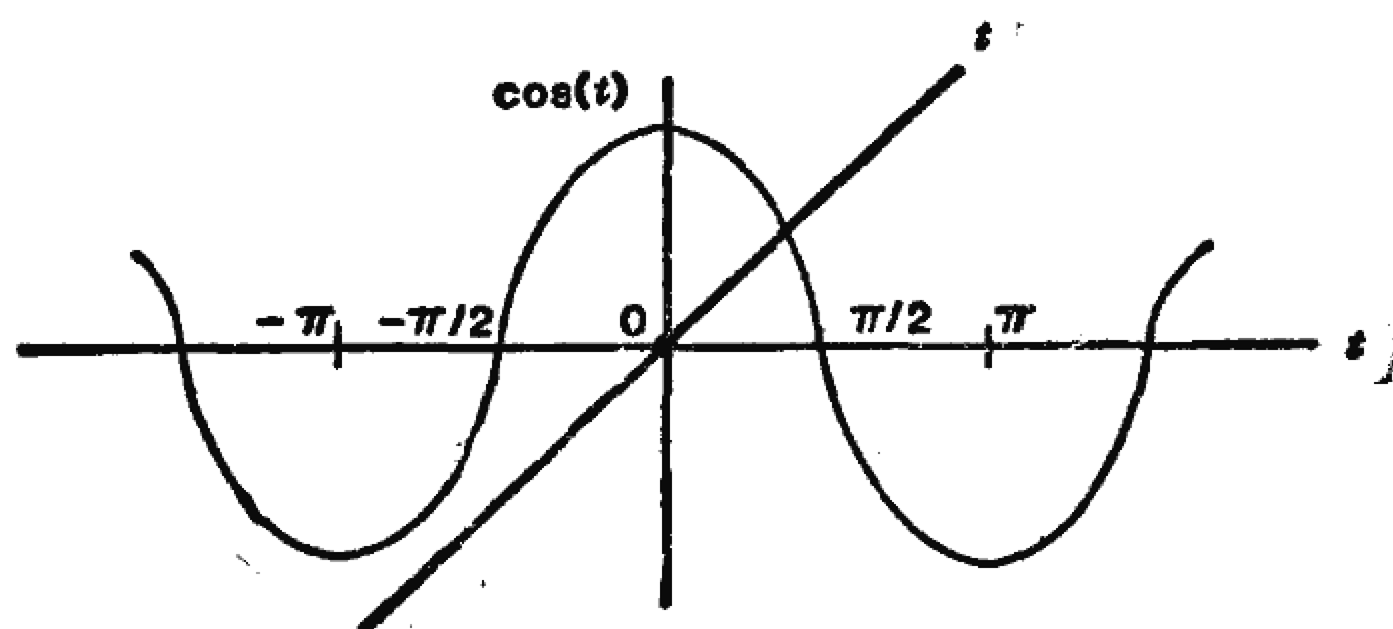


图1 存在着一个角 t，使 $\cos t = t$ 的证明

"A 推出 B"是不是真的，当然由 A 和 B 自身是真是假来确定. 因此，可以考虑下列四种可能的情形.

(1) A 是真的并且 B 也是真的.

(2) A 是真的但 B 是假的.

(3) A 是假的但 B 是真的.

(4) A 是假的并且 B 也是假的.

例如，你的朋友提出以下命题："如果下雨，那么玛丽带伞."在这里命题 A 是"下雨"，而命题 B 是"玛丽带伞". 当你分别问过四种可能的情形而肯定了在哪种情形下你的朋友撒了谎，你就可以确定在这种情形下命题"A 推出 B"是假的. 在第一种情形下(即下雨并且玛丽带了伞)，你的朋友说的是真话；在第二种情形下，下雨了，但玛丽没有带伞，你的朋友说的是谎话，而不是真话；最后，情形(3)和(4)是没有下雨，在这种情形下你不能说你的朋友撒了谎. 因为你的朋友只是说如果下雨的话，玛丽带伞的事情要发生. 可见，在四种情形中除第二种外命题"A 推出 B"都是真的. 将这些简要地列在表1中.

表1 "A 推出 B"的真值表

A	B	A 推出 B
真	真	真
真	假	假
假	真	真
假	假	真

表1是真值表的一个例子. 对一个复合命题(这里是"A 推出B")来说，当组成它的各个命题(这里是 A 和 B)取各种可能的真假值时，它在什么时候是真的，可用真值表的方法来确定. 别的真值表将在第三章中出现.

根据表1，当试图证明"A 推出 B"是真时，可以承认"推出"一词左边的命题(就是 A)是真的，目的是断定右边的命题(也就是 B)是真的. 应该注意，证明命题"A 推出 B"不是要

验证 A 和 B 自身都是真的，而是要说明，在承认 A 为真的前提下 B 是 A 的逻辑结论.

一般来说，能够证明 B 是真的在很大程度上依赖于已经假定了 A 是真的这个事实，并且归根结蒂是能找到 A 和 B 之间的联系. 要做到这一点，要求具有相当的创造力. 本书叙述的证明方法只是引导你入门并给你指出前进的方向.

今后 A 和 B 都是命题，它们或者是真的或者是假的，两者必居其一. 重要的问题是怎样证明"A 推出 B".

习 题

1.1 下列各题哪个是命题（所谓一个命题必须或者为真或者为假）？

(a) $ax^2+bx+c=0$.

(b) $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

(c) 三角形 XYZ 相似于三角形 RST.

(d) $3+n+n^2$.

(e) $\sin\dfrac{\pi}{2}<\sin\dfrac{\pi}{4}$.

(f) 对每一个角 t，$\sin^2 t+\cos^2 t=1$.

1.2 指出下面每个命题中的假设和结论.

(a) 如果直角三角形 XYZ 的直角边长是 x 和 y，斜边长是 z，面积是 $\dfrac{z^2}{4}$，那么直角三角形 XYZ 是等腰三角形.

(b) n 是偶数 $\Rightarrow n^2$ 也是偶数.

(c) 如果 a, b, c, d, e, f 都是实数，具有性质 $ad-bc\neq 0$，那么线性方程组

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$$

对 x, y 有解.

(d) 前 n 个正整数的和是 $\frac{n(n+1)}{2}$.

(e) r 是实数,并且满足 $r^2=2$, 推出 r 是无理数.

(f) 如果 p 和 q 是正实数, 并且 $\sqrt{pq} \neq \frac{p+q}{2}$, 那么 $p \neq q$.

(g) 当 x 是实数时, $x(x-1)$ 的最小值至少是 $-\frac{1}{4}$.

1.3 如果要证明"A 推出 B"是真的,并且已经知道 B 是假的,还需要证明 A 是真的或是假的吗?说明理由.

1.4 利用表 1 确定下列命题在什么条件下是真的或假的,并说出理由.

(a) 如果 $2>7$, 那么 $1>2$.

(b) 如果 $2<7$, 那么 $1<3$.

(c) 如果 $x=3$, 那么 $1<2$.

(d) 如果 $x=3$, 那么 $1>2$.

1.5 对下面每个命题作一真值表.

(a) A 推出 (B 推出 C).

(b) (A 推出 B) 推出 C.

2. 顺推-倒推法

本章的目的是讲述一个基本的证明方法：顺推-倒推法．本章的内容很重要，因为其他的所有证明方法都要运用顺推-倒推法．

进行任何证明时，第一步必须识别命题 A 和命题 B．一般来说，在“如果”这个词之后和“那么”这个词之前的所有词组成了命题 A，而在“那么”这个词之后的所有词组成了命题 B．换句话说，你承认是真的那些(即假设)是 A，而要去证明的那些(即结论)是 B．考察下面的例子．

例 1 如果直角三角形 XYZ 的直角边长为 x，y，斜边长为 z，面积为 $\frac{z^2}{4}$，那么三角形 XYZ 是等腰三角形(见图 2)．

证明概要 这个例子中的命题是

A：直角三角形 XYZ 的直角边长为 x，y，斜边长为 z，面积为 $\frac{z^2}{4}$．

B：三角形 XYZ 是等腰三角形．

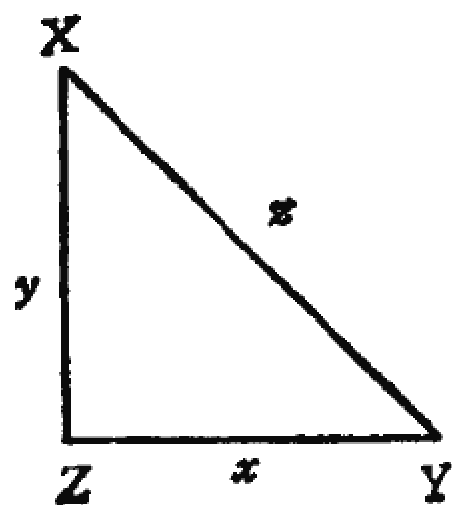


图 2 直角三角形 XYZ

在上一章说过，要证明“A 推出 B”时，你可以承认 A 是真的，并且必须利用这一信息来得到 B 是真的这个结论．为了想像出怎样才能得到 B 是真的这个结论，你要用倒推法来思考．相反，当你要用 A 中所给信息时，你要用顺推法来思考．这两种思考过程详细地叙述如下．

在倒推过程中，你开始问："怎样才能断定命题 B 是真的？"你提出的这一问题是起决定性作用的，因为你最终必须对这个问题给出回答．这个问题应该用抽象形式提出．对于例 1，正确的抽象问题是"怎样才能证明一个三角形是等腰的？"虽然要证明三角形 XYZ 是等腰的，但所问的抽象问题可促使你想到关于三角形的一般知识，并且可以排除无关紧要的细节（例如把三角形叫做 XYZ 而不叫做 ABC 之类的细节），这样就可以将注意力集中到问题的本质上了．由命题 B 得到的上述问题叫做抽象问题．正确提出的抽象问题应该不出现所考虑的特殊题目中所使用的符号和记号．对许多证明来说，关键都在于表述出一个正确的抽象问题．

一旦提出抽象问题，倒推过程的下一步就是回答这个问题．还是看例 1，怎样才能证明一个三角形是等腰的？方法之一无疑是证明它有两个等长的边．参看图 2，应该证明 $x=y$．值得注意的是，回答抽象问题要有两个部分．首先给出一个抽象的回答：要证明一个三角形是等腰的，需证它有两个边的长相等．其次，将这个回答用到所考虑的题目上．在这里，证明它有两个边的长相等是通过证明 $x=y$ 而不是证明 $x=z$ 或 $y=z$ 来实现的．提出抽象问题，抽象地回答，然后将这个抽象回答用到所考虑的题目上的整个过程叫做抽象过程．

抽象过程给出了一个新命题 B_1，B_1 具有这样的特性，如果能证明 B_1 是真的，那么 B 就是真的．对于所说的例子，新命题是

$$B_1\text{:}\quad x=y$$

如果能证明 $x=y$，那么三角形 XYZ 是等腰的．当有了命题 B_1 之后，现在应集中精力断定 B_1 是真的，因为由它就可得出 B 是真的．怎样才能证明 B_1 是真的呢？当然最终要利用 A 是真的这个假设．但是当回答这个问题时，在大多数情形下，要

像现在一样继续进行倒推，对新命题 B_1 重复抽象过程. 这时在倒推过程中出现的困难是能否提出新的抽象问题.

因为 x 和 y 是一个三角形的两边的长，一个合适的抽象问题似乎应该是"怎样才能证明一个三角形两边的长相等?"另一个完全合理的抽象问题应该是"怎样才能证明两个实数相等?"因为 x 和 y 终归是实数. 抽象过程中出现的又一个困难是抽象问题可能多于一个. 怎样选出一个更准确的抽象问题往往是靠技巧而不是靠知识. 在侥幸的情况下只有一个明显的抽象问题，而在其它情况下就得使用试验法. 这时，直觉、见识、创造性和经验以及画图和列表都能起重要作用. 一般来说，应该让 A 中的信息(已经假设 A 是真的)帮助你进行选择.

不管选择哪个问题，下一步就是回答它，首先是抽象的回答，然后是对所考虑的题目来回答. 对于上述两个抽象问题应该怎样回答呢?对于第一个，可以通过证明三角形的两边所对的角相等来证明这两个边的长相等. 对于图 2 的三角形 XYZ，就是要证明角 X 等于角 Y. 经过粗略地考察，发现在命题 A 中似乎没有提供有关三角形 XYZ 的角的更多信息. 所以我们应选择另一个抽象问题.

现在面临的问题是"怎样才能证明两个实数(即是 x 和 y)相等?"这个问题的回答之一是证明两个数的差是 0，将这个问题用到命题 B_1 的特殊情形意味着应该证明 $x-y=0$. 遗憾的是也可以有别的回答：证明第一个数小于或等于第二个数，同时第二个数也小于或等于第一个数. 将这个回答用到命题 B_1 的特殊情形，应该证明 $x\leqslant y$ 和 $y\leqslant x$. 这样，在倒推过程中又出现了第三个困难：即使选出的是正确的抽象问题，答案也可能不止一个. 此外，也可能选出这样的抽象问题，即对于它是不可能完成证明的. 例如，抽象问题"怎样才能证明

一个三角形是等腰的?”它的回答也可以是“证明三角形是等边的”. 但是,不可能证明例1的三角形 XYZ 是等边三角形,因为它的一个角是 $90°$.

回到抽象问题“怎样才能证明两个实数(即 x 和 y)相等?”作为一种考虑,假如你选择的回答是证明它们的差为0. 这又开始了抽象过程,并且给你提出了新命题 B_2,如果你能证明 B_2 是真的,则 B_1 是真的,从而 B 也是真的. 新命题 B_2 是

$$B_2:\ x-y=0$$

现在你应该集中精力来断定 B_2 是真的. 你最后必须利用 A 中的信息,但此时让我们再一次将抽象过程用到新命题 B_2 上.

抽象问题之一是“怎样才能证明两个实数的差是0?”对这个问题似乎也没有合适的回答,在这个抽象过程中是不是还要提出另外的问题呢?抽象问题也可以没有明显的答案,但你不要失望,所有的努力都不会白费. 回想当证明“A 推出 B”时,已经假设了 A 是真的,到此为止还没有在任何地方利用过这一事实. 现在该是用顺推过程来思考问题的时候了.

顺推过程是:从命题 A 出发导出一个新命题 A_1,A_1 具有这样的性质:只要 A 是真的(这已经假定成立),则它也是真的. 要强调的是,并不是偶然地由 A 导出 A_1 的. 导出 A_1 是为了与在倒推过程中最后提出的命题相联接. 应当使倒推过程中的这个最后的命题在顺推过程中起到指引作用. 让我们转向例1. 要记住,在倒推过程中得到的最后命题是“$x-y=0$”.

例1中命题 A 是“直角三角形的直角边长是 x 和 y,斜边长是 z,面积是 $\frac{z^2}{4}$. ”作为 A 的结果,有 $\frac{xy}{2}=\frac{z^2}{2}$,因为直角三角形的面积是底乘高的一半,这里是 $\frac{xy}{2}$. 因此,你得到了新命题是

$$A_1:\ \frac{xy}{2}=\frac{z^2}{4}$$

根据勾股定理还能由 A 推出另一个有用的命题，它是

$$A_2:\ x^2+y^2=z^2$$

在顺推过程中也可以将新命题组合运用而形成更需要的命题. 例如可以将 A_1 和 A_2 用以下方式组合起来：根据 A_2，在 A_1 中用 x^2+y^2 代替 z^2 便得到

$$A_3:\ \frac{xy}{2}=\frac{x^2+y^2}{4}$$

顺推过程的困难是可能产生某些没有用的命题. 例如"角 X 小于 $90°$". 关于怎样形成新命题没有特别的准则，但要记住的是，顺推过程是为了得到在倒推过程中引出的命题 B_2: $x-y=0$. 正是由于这个原因，才用 A_1 和 A_2 消去 z^2.

继续顺推，应该尽力整理 A_3 使之更接近于 B_2. 例如可将 A_3 的两端乘以 4，并且从两边减去 $2xy$，得到

$$A_4:\ x^2-2xy+y^2=0$$

通过分解因式得到

$$A_5:\ (x-y)^2=0$$

顺推过程中最常见的一步是把命题改写成不同的形式，如由 A_4 得到 A_5. 例 1 的顺推过程(以及整个证明)的最后一步是求 A_5 中等式两边的平方根. 由此，便正好得到命题 B_2，即 $x-y=0$. 这就完成了全部证明. 因为你从命题 A 是真的出发，并且利用它推导出的命题 B_2 是真的，所以 B 是真的. 所有的步骤和理由总结在表 2 中.

注意到这一点是有趣的，顺推过程所产生的根本结果是避免了回答抽象问题 B_2: "怎样才能证明两个实数的差为 0?"——而是证明差的平方为 0(参看表 2 的 A_5).

最后还应该知道，一般来说，一个证明的思考过程实际上

并不要求完整写出，因为这样做需要太多的时间、精力和篇幅。甚至可以说，通常的叙述都是高度精练了的，并且经常少写或不详细地写出倒推过程。对于所说例子大致可以象下面这样写出来。

例 1 的证明 由假设和直角三角形的面积公式有，三角形 XYZ 的面积 $=\frac{xy}{2}=\frac{z^2}{4}$. 由勾股定理 $x^2+y^2=z^2$，将 z^2 用 x^2+y^2 代入，再进行一些恒等变形，得到 $(x-y)^2=0$，因而 $x=y$，即三角形 XYZ 是等腰的．// (符号"//"用来表示证明结束)

有时也用部分倒推和部分顺推来简化证明．例如：

例 1 的证明 如果证明了 $x=y$，那么命题得证，而这可转化为证明 $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2=0$．但是三角形的面积是 $\frac{xy}{2}=\frac{z^2}{4}$，故 $2xy=z^2$．根据勾股定理，$z^2=x^2+y^2$，因而 $x^2+y^2=2xy$ 或 $x^2-2xy+y^2=0$．这就是所要证明的． //

证明也可以完全写成倒推过程的形式，虽然这样做有些

表 2 例 1 的证明

命题	理由
A: XYZ 的面积是 $\frac{z^2}{4}$	题设
A_1: $\frac{xy}{2}=\frac{z^2}{4}$	面积＝底×高
A_2: $x^2+y^2=z^2$	勾股定理
A_3 $\frac{xy}{2}=\frac{x^2+y^2}{4}$	将 A_2 代入 A_1
A_4 $x^2-2xy+y^2=0$	恒等变形
A_5 $(x-y)^2=0$	因式分解 A_4
B_2 $x-y=0$	求 A_5 的方根
B_1 $x=y$	B_2 两边加上 y
B XYZ 是等腰的	因为 B_1 是真的

不自然，但还是值得了解一下的.

例 1 的证明 为了得到所要的结论，应该证明 $x=y$，而这只需要证明 $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2=0$，或者等价地证明 $x^2+y^2=2xy$. 而当证明了 $2xy=z^2$ 时，这就成立了，因为勾股定理给出了 $x^2+y^2=z^2$. 为此考察 $2xy=z^2$，或者等价地考察 $\frac{xy}{2}=\frac{z^2}{4}$ 是否成立. 注意到 $\frac{xy}{2}$ 是三角形的面积，并且由题设它等于 $\frac{z^2}{4}$. 这样就完成证明了. //

在研究性的论文中出现的证明常常是极为简练的，只对怎样证明给出提示. 例如

例 1 的证明 假设连同勾股定理给出 $x^2+y^2=2xy$，所以 $(x-y)^2=0$，由此便得到三角形是等腰的结论.

注意，"所以"一词实际隐含着 $(x-y)^2=0$ 的理由. 它是恒等变形（如我们前面已经知道的）还是别的什么东西呢？遗憾的是，这种经压缩了的典型叙述常出现在数学书中，并且正是这种叙述给阅读带来了困难. 应该力争具有阅读和分析这种简练证明的能力. 为了达到这一点，需要了解各种常用的证明方法（因为并不是只有顺推-倒推这一种方法）. 这样，由书上是怎样写的，就可以发现证明中用的是什么样的思考过程，也就可以弄清楚没有给出详细说明的每一个步骤. 证明越是简练，其过程也越难懂. 怎样阅读简练了的证明的例子，将放在两个附录中. 读这本小册子是不需要太费劲的，因为在每一个简练了的证明之前都有一个概要，概括地叙述了所用的证明方法和理由. 但也要指出，这些概要比例 1 所做的要简明得多.

总结起来说，顺推-倒推法的目的是为了证明"A 推出 B". 首先，你试图断定 B 是真的. 通过提出和回答抽象问题的抽象过程而引出一个新命题 B_1，B_1 具有这样的性质：如果

B_1 是真的，那么 B 是真的．这时应该集中精力证明 B_1 是真的．为了达到这个目的，将抽象过程运用于 B_1 而得到新命题 B_2，B_2 具有这样的性质：如果 B_2 是真的，那么 B_1（因而 B）也是真的．要记住的是，整个抽象过程是在假设 A 是真的这个事实的引导下进行的．按照这种方式继续下去，直到你或者得到了命题 A（于是证明结束）或者直到你不能再提出和（或）回答出满意的抽象问题．在后面这种情形下就开始顺推过程，由命题 A 推出一系列命题．由于假设 A 是真的，这些命题也必定是真的．要记住，顺推过程的目的是为了得出你在倒推过程中最后引出的那个命题．达到了这个目的，你就成功地完成了证明．

用以下的比喻能很容易地记住顺推法和倒推法．先把命题 B 想像成草垛里的一根针．当你从 A 是真的这个假设出发用顺推法时，你是从草垛外的某个地方出发来寻找这根针的．而当你用倒推法时，你是从这根针出发，寻找一条通往草垛外面进而达到命题 A 的途径（参看图 3）．

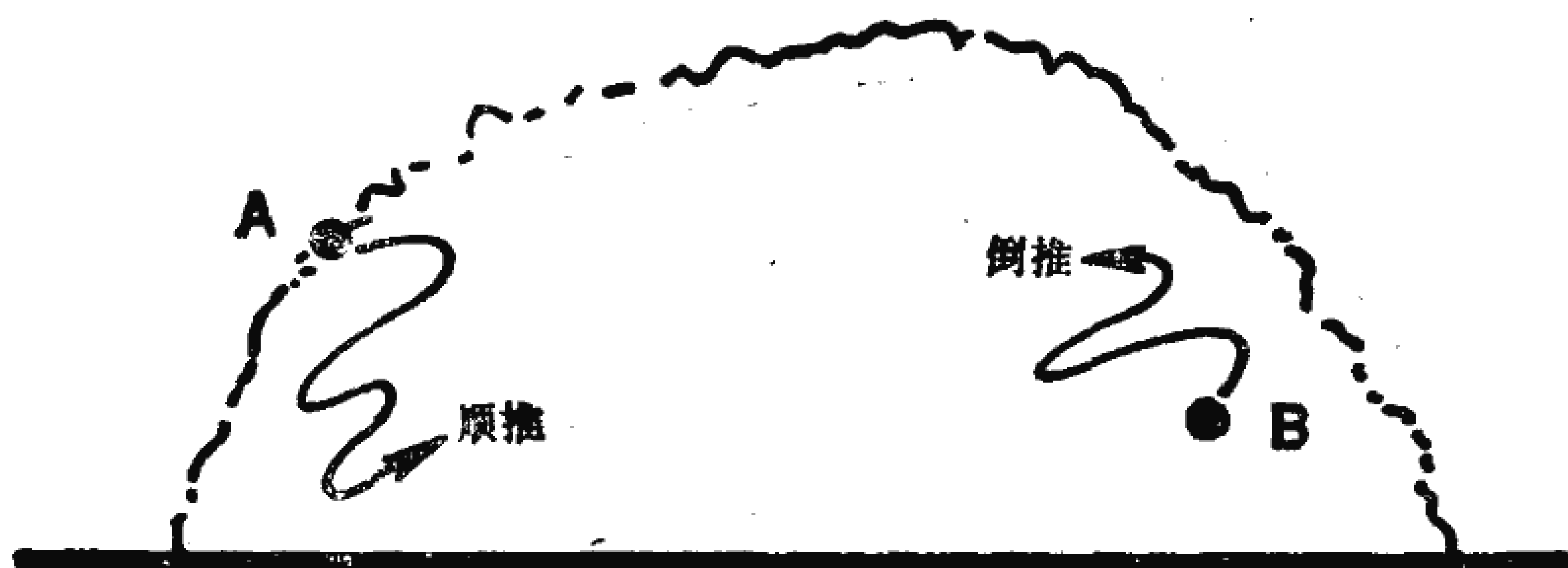


图 3　在草垛里找针

另外也可以把顺推-倒推法想像成一个迷宫，A 是它的起点而 B 是希望达到的终点（参看图 4）．在取得成功之前，你必须多次交替地进行顺推和倒推，因为很可能有许多错误的出发点和死胡同．

作为一般规则，顺推-倒推法是我们提出的第一种证明方法．简单地说，它大致是用不同的办法去试着解决在 B 的基础上所提出来的问题，直到有了理由为止．在任何情况下都要透彻地了解 A 和 B 之间的关系．

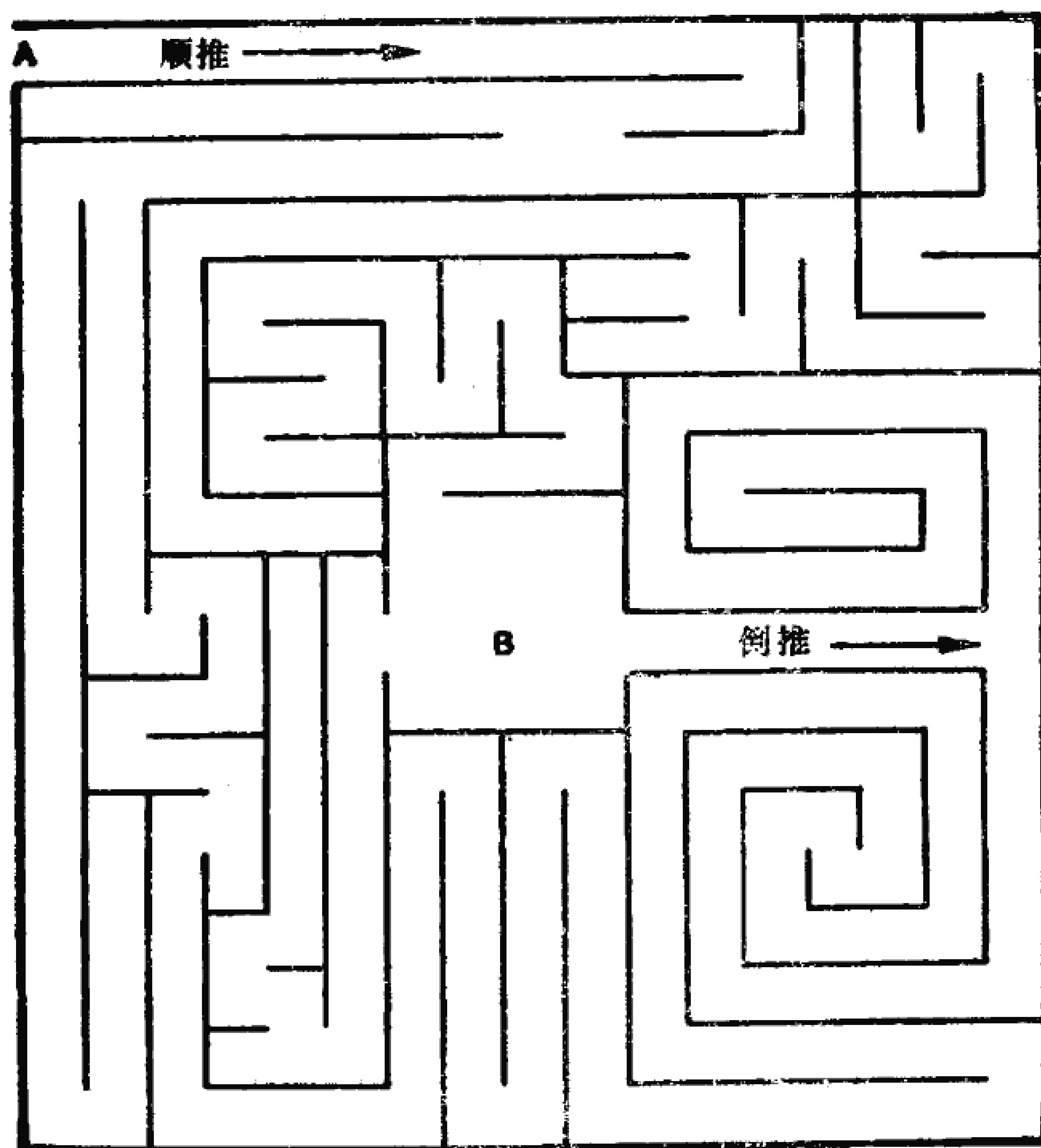


图4 迷 宫

习 题

注：所有证明都必须有证明概要和简练的证明．

2.1 试述顺推过程和倒推过程之间的区别，分别指出这两个过程是怎样进行的，以及可能出现的困难．它们之间又

有怎样的联系？

2.2 考察如下的证明题："如果 x 是实数，则 $-x^2+2x+1$ 的最大值 $\geqslant 2$"。对这个题来说，下列抽象问题哪些是不正确的？为什么？

(a) 怎样才能证明一条抛物线的最大值≥一个数？

(b) 怎样才能证明一个数≤一条抛物线的最大值？

(c) 怎样才能证明函数 $-x^2+2x+1$ 的最大值≥一个数？

(d) 怎样才能证明一个数≤一个二次函数的最大值？

2.3 考察证明题："如果

$$R=\{\text{实数 } x:\ x^2-x\leqslant 0\}$$
$$S=\{\text{实数 } x:\ -(x-1)(x-3)\geqslant 0\}$$
$$T=\{\text{实数 } x:\ x\geqslant 1\}$$

则 R 交 S 是 T 的子集合。"对于这个题来说，下列抽象问题哪些是正确的？为什么？哪些是不正确的？为什么？

(a) 怎样才能证明一个集合是另一个集合的子集合？

(b) 怎样才能证明集合 R 交 S 是 T 的子集合？

(c) 怎样才能证明在集合 R 交 S 内的每一个数都≥1？

(d) 怎样才能证明两个集合的交与另一个集合有共同的数？

2.4 对下面的每一个题，尽可能地列出抽象问题（至少两个）。当然，你列出的问题应该不出现这个特殊题目的符号或记号。

(a) 如果 l_1 和 l_2 是圆 c 的直径 d 的端点 e_1 和 e_2 处的切线，那么 l_1 和 l_2 是平行的。

(b) 如果 f 和 g 是连续函数，那么函数 $f+g$ 也是连续的（注：连续性是函数的一个性质）。

(c) 如果 n 是偶数，那么 n^2 是偶数。

(d) 如果 n 是满足 $-3n^2-2n+8=0$ 的已知整数，那么 $2n^2-3n=-2$.

2.5 对以下每一个抽象问题，尽可能地列出你的回答(至少三个).

(a) 怎样才能证明两个实数相等?

(b) 怎样才能证明两个三角形全等?

(c) 怎样才能证明两条直线平行?

(d) 怎样才能证明四边形是矩形?

2.6 对下面每一个题:

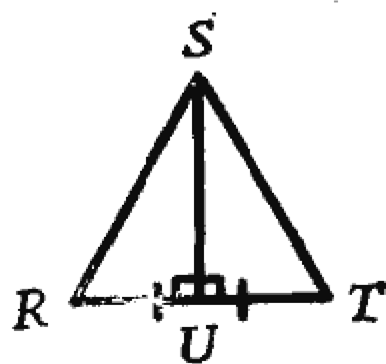
(1) 提出一个抽象问题.

(2) 抽象地回答它.

(3) 将你的回答用到所给的这些题上:

(a) 如果 a, b 和 c 是实数，$a>0$, $b<0$, 并且 $b^2-4ac=0$, 那么方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根是正的.

(b) 在下图中，如果 SU 是 RT 的垂直平分线，并且 $\overline{RS}=2\overline{RU}$, 那么 RST 是等边三角形.



2.7 对下面每一个假设，尽可能地列出命题(至少三个)，它们是应用顺推过程一步就得到了的结果.

(a) 实数 x 满足 $x^2-3x+2<0$.

(b) 在图 2 的三角形 XYZ 中，角 X 的正弦等于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(c) 圆 c 是由所有满足 $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ 的值 x, y 相应的点 (x, y) 组成.

(d) 三角形 UVW 是等边三角形.

2.8 考察证明题:"如果 x 和 y 是实数，使得 $x^2+6y^2-25=0$, 并且 $y^2+x=3$, 那么 $|y|=2$." 在从假设开始作顺推时，下面这些方程哪些是不成立的?为什么?

(a) $y^2=3-x$.

(b) $y^2=\frac{25}{6}-\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^2$.

(c) $(3-y^2)^2+6y^2-25=0$.

(d) $(x+5)=\frac{-6y^2}{x-5}$.

2.9 考察证明题："如果 x 和 y 是非负实数，并且满足 $x+y=0$，那么 $x=0$，$y=0$。"

(a) 对于以下简练了的证明，写出一个证明概要，并且指出其中的顺推、倒推步骤和抽象问题及其回答.

证明 首先我们只要证明 $x\leqslant 0$，因为由假设 $x\geqslant 0$，就必然有 $x=0$. 为了看出有 $x\leqslant 0$，根据假设 $x+y=0$，故 $x=-y$，再由 $y\geqslant 0$ 推出 $-y\leqslant 0$，因而 $x=-y\leqslant 0$. 最后可以看到 $y=0$. 这是因为 $x=0$，并且 $x+y=0$，这就必定有 $0+y=0$. //

(b) 完全用倒推过程来写出(a)中所说的简练证明.

2.10 考察由两个字母 s，t 组成的字表，这个字表中的字是这样组成的：s，t 是字并且按任何次序将以下规则用到旧字上都产生新字.

(1) 重复已有的字(即由 sts 可产生 $stssts$).

(2) 从已有的字中去掉 tt(即由 $stts$ 能够得到 ss).

(3) 在已有的字中将 sss 用 t 代替 (即由 $stsss$ 能够得到 stt).

(4) 如果已有的字中最后一个字母是 s，可在这个字的右端增加一个字母 t(即由 tss 能够得到 $tsst$).

(a) 运用三步顺推过程找出将所说规则用到字 ss 上能得到的所有字.

(b) 运用一步倒推过程到字 tst 上. 明确地说，列出所有这样的字，对这些字运用上述规则中的一个能得 tst.

(c) 证明"如果 s 是字，那么 tst 也是字"。

(d) 证明"如果 s 是字，那么 $ttst$ 也是字"。

2.11 证明如果图 2 的直角三角形 XYZ 是等腰的，那么它的面积是 $\frac{z^2}{4}$。

2.12 证明 2.6(b)中的命题是真的。

3. 定义和数学术语

在上一章中，学习了顺推-倒推法，看到了表述和回答抽象问题的重要性．回答抽象问题的一个最简单和最有效的方法，是应用这一章所要讲的定义．另外，在这一章也要学习数学语言中的一些“词汇”．

定义比命题没有什么更多的东西，可以认为定义就是由组成命题的那些部分组成．在第一章中已经遇到过定义．在那里我们给出过命题“A 推出 B”是真的定义，这就是我们规定：除了当 A 是真的而 B 是假的外，在其它所有情形下这个命题都是真的．决不是说，你必须接受这个定义是正确的．但是，如果你不接受的话，那我们对这个特定的概念就不可能有共同的理解了．

定义不是随意作出的，通常它们都是由反复出现的数学概念而引出来的．事实上，定义可以看成是一个特殊概念的简称．例如“除了 1 和自身不能被任何整数整除的不是 1 的正整数”就简称(定义)为“素数”．确实，叫“素数”比起叫“除了 1…… 的不是 1 的正整数”要方便得多．当一个概念经常出现时更是这样．下面再举几个定义的例子．

定义 1 如果有某个整数 k，使 $m=kn$，那么说整数 n 整除整数 m(记为 $n|m$)．

定义 2 如果一个大于 1 的整数 p 在正整数中只能被 1 和 p 整除，那么说 p 是素数．

定义 3 如果一个三角形有两个边的长相等，那么说它是等腰三角形．

定义 4 如果 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, 那么说实数对 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 相等.

定义 5 一个整数 n 是偶数，当且仅当它除以 2 的余数是 0.

定义 6 一个整数 n 是奇数，当且仅当存在某个整数 k，使 $n=2k+1$.

定义 7 一个实数 r 是有理数，当且仅当 r 能表示成两个整数 p 和 q 的比，其中分母 q 不是 0.

定义 8 两个命题 A 和 B 等价，当且仅当“A 推出 B”并且“B 推出 A”.

定义 9 由命题 A、命题 B 作出的命题:“A 并且 B”(记为 $A\wedge B$)是真的，当且仅当 A 是真的并且 B 也是真的.

定义 10 由命题 A、命题 B 作出的命题:“A 或者 B”(记为 $A\vee B$)，除了 A 和 B 都是假的这一情形外，所有其它情形都是真的.

我们看到，在一些定义中曾经用过“当且仅当”一词，但是一般往往只用“当”来代替“当且仅当”. 有些术语，如“集合”和“点”不给出定义. 也曾经打算给出集合的定义，例如将集合定义成某些事物的总体，但这样做是没有用的. 因为“事物”的概念更加含糊不清，因而就必然要追问“事物”的定义又是什么?这样问下去就会永无尽头了.

在例 1 的证明中，已经用过定义来回答抽象问题. 我们还记得对例 1 最早提出的抽象问题是“怎样才能证明一个三角形是等腰的?” 而为了用定义证明一个三角形是等腰三角形，方法之一是利用定义 3 证明它有两个边的长相等. 在顺推过程中定义是按同等的意义来使用的. 例如，当你已知一个整数是奇数，那么由定义 6 就知道有某个整数 k，使 $n=2k+1$. 用定义来作顺推和倒推是经常在证明中出现的.

同一个概念常常可能有两种定义. 例如，偶数的概念可用定义5给出，另外也可以将偶数定义为"能表示成2的整数倍的数". 当然，某些概念只有一种定义. 当概念有多于一种的定义时，这些定义之间有什么关系呢？因为定义纯粹是对某个事物的约定. 那些可以互相代替的每一个定义都是同一事物的约定，所以当选择出一种定义之后，一定可以用适当的方法来建立这种定义与其它可代替的定义之间的"等价性".

例如，对于偶数可以这样作：用定义5得到命题A："n是除以2余数为0的整数"，再用另一个定义建立命题B："n是能表示成2的整数倍的数". 所谓建立定义之间的等价性，就是必须证明"A推出B"并且"B推出A"(看定义8). 由此可知，如果A是真的(即n是除以2余数为0的整数)，那么B是真的(即n是能表示成2的整数倍的数)，而且如果B是真的，那么A也是真的.

命题A等价于命题B经常写作"A是真的，当且仅当B是真的"，或者更简单地写作"A当且仅当B"，用数学记号写作"$A \Leftrightarrow B$". 要肯定"A当且仅当B"成立，必须证明"A推出B"并且"B推出A".

弄清楚一个定义与哪些可代替它的定义等价是十分重要的. 例如，在某个证明中提出了抽象问题"怎样才能证明一个整数是偶数"，由于偶数概念有两个等价的定义，这样就有两个可能的回答. 一个直接由定义得到，要证明一个整数是偶数需要证明它除以2的余数是0. 第二个回答根据可代替它的等价定义，应该证明这个整数可以表示为2的整数倍. 类似地在顺推过程中如果已知n是一个偶数，那么根据这个已知就有了两个可用的真命题：原来的定义和可以代替它的定义. 虽然在抽象地回答抽象问题(或进行顺推)时，像例1那样有多于一种的途径会出现麻烦，但是像下面例子的证明那

样，有时它也可能带来方便之处.

例 2 加果 n 是偶数，那么 n^2 也是偶数.

证明概要 用顺推-倒推法来进行，提出抽象问题："怎样才能证明整数（即 n^2）是偶数？" 选择与原来定义等价的定义，证明 n^2 能表示成 2 的整数倍就回答了这个问题. 答案可由顺推法得到. 因为 n 是偶数，利用等价定义，n 能够表成 2 的整数倍，设为 k 倍（即 $n=2k$）. 由此

$$n^2=n\cdot n=(2k)(2k)=4k^2=2(2k^2)$$

这就已经证明了 n^2 能表示成 2 的整数倍，即 $2k^2$ 倍，从而完成了证明. 当然，对这个问题也可以用定义 5 来解答，但这样做要困难一些.

例 2 的证明 因为 n 是偶数，存在整数 k 使 $n=2k$. 因此 $n^2=(2k)(2k)=2(2k^2)$，从而 n^2 是偶数. //

在作顺推和回答抽象问题时，使用定义是最常用的方法. 掌握与定义等价的命题越多，在顺推和倒推过程中供选择的命题就会越多. 当然，等价命题太多了也会给确切地选出一个有用的命题造成困难.

在数学中谈到证明时，你经常要遇到以下四个术语：论断[1)]、定理、引理和推论. 论断是你试图去证明的一个命题. 这里所举的例子都是论断. 有些论断（主观地）认为非常重要就把它叫做定理. 有些定理的证明可能很长，便经常用一些"片段"连在一起. 例如要证明命题 "A 推出 B"，首先必须证明 "A 推出 C"，再证明"C 推出 D"，最后则可得到"A 推出 B"，这些论断都可以单独分离出来，并把它们叫做引理. 换句话说，引理是用来证明定理而预先提出的论断. 当定理建立之后，常常会出现这种情形：有些论断可作为定理的结果而立刻

1) 通常叫命题，但为了与前面已经用过的命题一词相区别，我们把它叫做论断. ——译者注

推出．这样的论断叫做推论．总结起来说，论断是你试图证明的真命题，定理是重要的论断，引理是为了用来证明定理而预先提出的论断，而推论是由定理可直接推出的论断．

正如某些数学概念不用正式定义而被接受下来一样，某些论断也不用证明而被承认．这种不用证明而承认下来的论断叫做公理．例如下面的论断就是一个公理："两点之间的最短距离是连接它们的直线段．"公理的进一步讨论已超出本书的范围．

正如定义能够用在顺推和倒推过程中一样(前面已经作过)，论断也是这样．看下面的例子．

例 3 如果直角三角形 RST 两直角边的长是 r 和 s，斜边长是 t 并且满足 $t=\sqrt{2rs}$，那么三角形 RST 是等腰三角形(参看图 5)．

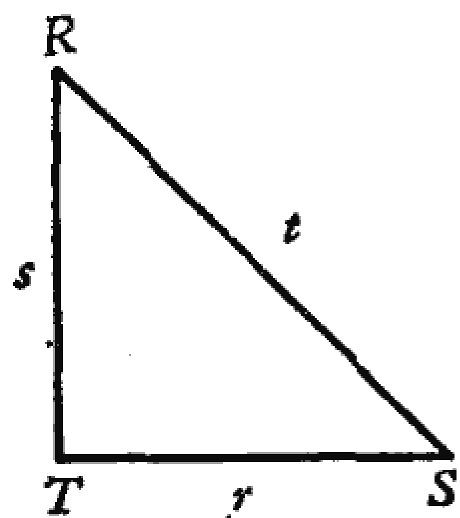


图 5 直角三角形 RST

证明概要 顺推和倒推法提出的抽象问题是："怎样才能证明三角形(即 RST)是等腰的？"回答之一是利用定义 3．但例 1 已经证明 XYZ 是等腰三角形，由这个结论也提供了另一个回答，这就是用对三角形 XYZ 相同的推理来断定三角形 RST 是等腰的．容易知道，如果三角形 RST 也满足例 1 对三角形 XYZ 所作的假设，则 RST 必定满足对三角形 XYZ 所做的结论，从而是等腰的．

为了验证三角形 RST 满足例 1 中的假设，首先必须将这里的记号与例 1 中的记号作对比，也就是说，对应的边长是 $x=r$, $y=s$, $z=t$．这样，要验证例 1 的假设现在是满足的，应该看出三角形 RST 的面积等于 $\frac{1}{4}t^2$，或者等价地说，应该证

明$\frac{1}{2}(rs)=\frac{1}{4}(t^2)$，因为 RST 的面积是$\frac{1}{2}rs$.

由现在的假设$t=\sqrt{2rs}$作顺推，能够证明$\frac{1}{2}(rs)=\frac{1}{4}t^2$，因为只要两边平方并除以4就可以了．不要忘记例1的假设中还要求 RST 是直角三角形．但 RST 当然是直角三角形，这是现在的假设已经给出了的．

注意，如果现在的三角形是记为WXY，直角边长记为w，x，斜边记为y，在将它与例1的三角形的记号作对比时，就会有较大的困难．这种"巧合的"记号今后可能会出现．当这种情形出现时，最重要的是保持这些记号的本来意义．

在下面所叙述的简练证明中，并没有写出对记号所作的对比．

例3的证明　由假设$t=\sqrt{2rs}$，得到$t^2=2rs$，或者等价地得到$\frac{1}{4}(t^2)=\frac{1}{2}(rs)$．由此，直角三角形 RST 的面积$=\frac{1}{4}(t^2)$，这已满足了例1的假设，因而例1的结论对三角形 RST 成立，RST 是等腰三角形．//

利用已有论断的结论来回答抽象问题是十分普遍的．不要忘记，你必须将现有的记号和已有论断的记号作对比，验证已有论断中的假设是成立的．

与命题A紧密相关的是命题A的否定，即命题非A(有时也记为$\sim A$)．当命题A是假的时，非A是真的，反过来也对．在第10章将更多地讨论命题的否定(非)．

已知两个命题A和B，已经学过了命题"A推出B"的意义．此外还可用其他方式来说明"A推出B"．例如

(1) 当A是真的时，B也必须是真的．

(2) B由A推出．

(3) B 是 A 的必然结果.

(4) 对于 B 来说 A 是充分的.

(5) A 仅当 B.

有以下三个命题与命题"A 推出 B"有关:

(1) "B 推出 A"(叫做逆命题).

(2) "非 A 推出非 B"(叫做否命题).

(3) "非 B 推出非 A"(叫做逆否命题).

用表1可以确定这三个命题在什么情形下是真的. 例如对逆否命题"非 B 推出非 A"来说, 除了"推出"一词左边的命题(就是非 B)是真的而"推出"一词右边的命题(就是非 A)是假的这个情形外, 在其余所有情形下都是真的. 可参看表3.

注意, 从表3可以看到, 命题"非 B 推出非 A"是真的的条件与命题"A 推出 B"是真的的条件完全相同, 也就是说, 除了 A 是真的而 B 是假的这一情形外, 在其余所有情形下它们都是真的. 由此就得到一个新的证明方法, 这就是在第9章将要讲的换质位法. 对于逆命题和否命题也可给出类似于表3的真值表, 把它们留作习题.

这一章讲述了许多在数学语言中使用的术语的意义, 最重要的是指出了怎样将定义和怎样将已有的论断用到顺推-倒推法中. 下面便可以学习更多的证明方法了.

表3 "非 B 推出非 A"的真值表

A	B	非 B	非 A	$A\Rightarrow B$	非 $B\Rightarrow$非 A
真	真	假	假	真	真
真	假	真	假	假	假
假	真	假	真	真	真
假	假	真	真	真	真

习　题

注：所有的证明都必须有证明概要和简练的证明.

3.1　对下面每一个命题中的结论提出一个抽象问题.

(1) 用定义抽象地回答.

(2) 将这个回答用到所给的题上.

(a) 如果 n 是奇数，那么 n^2 也是奇数.

(b) 如果 s, t 都是有理数，并且 $t\neq 0$，那么 $\frac{s}{t}$ 是有理数.

(c) 设 a, b, c, d, e 和 f 都是实数，$ad-bc\neq 0$，如果 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 都是实数对，且满足

$$ax_1+by_1=e, \quad cx_1+dy_1=f$$
$$ax_2+by_2=e, \quad cx_2+dy_2=f$$

那么 (x_1, y_1) 等于 (x_2, y_2).

(d) 如果 n 是大于 1 的正整数，并且 2^n-1 是素数，那么 n 是素数.

(e) 设 $n-1$, n, $n+1$ 是三个连续整数，那么 9 整除它们的立方和.

3.2　对下面每一个命题中的假设，用定义作一步顺推.

(a) 如果 n 是奇数，那么 n^2 是奇数.

(b) 如果 s 和 t 是有理数，并且 $t=0$，那么 $\frac{s}{t}$ 是有理数.

(c) 如果 RST 是等边三角形，那么它的面积是一个边长的平方的 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 倍.

(d) 如果图 2 的直角三角形 XYZ 满足 $\sin x=\cos x$，那么 XYZ 是等腰三角形.

(e) 如果 a, b, c 都是整数，并且 $a|b$, $b|c$ 那么 $a|c$.

3.3　对以下命题给出真值表.

(a)“A 推出 B”的逆命题.

(b)“A 推出 B”的否命题.

(a)与(b)有什么关系?

(c) A 或者 B(即 $A\vee B$).

(d) A 并且 B(即 $A\wedge B$).

(e) A 并且非 B(即 $A\wedge(\sim B)$).

(f)(非 A)或者 B(即$\sim A\vee B$).

(f)与“A 推出 B”有什么关系?

3.4　对下面的每一个命题写出它的逆命题、否命题以及逆否命题.

(a) 如果 n 是使 n^2 是偶数的整数,那么 n 是偶数.

(b) 如果 r 是实数,并且使 $r^2=2$,那么 r 不是有理数.

(c) 如果 $ABCD$ 是有一个角是直角的平行四边形,那么 $ABCD$ 是矩形.

(d) 如果对角 t 有 $\sin t=\cos t$,并且 $0<t<\pi$,那么$t=\frac{\pi}{4}$.

3.5　求证:如果 n 是奇数,那么 n^2 是奇数.

3.6　求证:如果 n 是奇数,m 也是奇数,那么 mn 是奇数.

3.7　求证:如果“A 推出 B”,“B 推出 C”,那么“A 推出 C”.

3.8　求证:如果“A 推出 B”,“B 推出 C”而且“C 推出 A”,那么 A 等价于 B,并且 A 等价于 C.

3.9　假设有一个用命题 A 作成的定义,同时具有三个可以代替它的定义,设是 B, C, D.

(a) 要证明 A 等价于这三个可以代替它的定义中的每一个,需要作多少个证明?

(b) 证明"A 推出 B"，"B 推出 C"，"C 推出 D"以及"D 推出 A"要作多少个证明？

(c) 试述为什么完成了(b)中的证明，就可以建立起原有定义与这些可代替的定义之间的等价性（以及它们中的每一个与另一个的等价性）？

3.10 试按以下指定的方法求证命题：如果直角三角形 UVW 的直角边长是 u，v，斜边长是 w，并且满足 $\sin V=\sqrt{\dfrac{u}{2v}}$，那么 UVW 是等腰三角形。

(a) 利用等腰三角形的定义。

(b) 验证三角形 UVW 满足例 1 的假设。

(c) 验证三角形 UVW 满足例 3 的假设。

4. 量词——I. 构造法

在前一章已经看到，定义可以较好地用来回答抽象问题。在下面四章中再给出一些别的方法，这些方法用来表述和回答当命题 B 具有某些特殊形式时提出的抽象问题。

在所有数学分支中都反复出现 B 的这样两种特殊形式，它们经常用一些意义相同的关键词来表达。第一种所用的词是"存在"("有一个"，"存在某些")。第二种所用的词是"对所有的"("对每一个"，"对任意一个"，"对任何一个")。这两组词都叫做量词，第一组叫做存在量词，第二组叫做全称量词，每一组引出它特有的证明方法。这一章讨论存在量词及其相应的证明方法，这种方法叫做构造法。全称量词及其相应的证明方法将在下一章讨论。

在许多数学命题中，存在量词的出现是十分自然的。回忆一下定义 7，在那里有理数定义为能表示成两个整数之比的实数，其中分母不为零。这个定义正好可以用存在量词来表达。

定义 11 一个实数 r 是有理数，当且仅当存在整数 p 和 q $(q\neq 0)$ 使得 $r=\frac{p}{q}$.

另一个例子是偶数的另一个定义，它是一个整数并且能表示成某个整数与 2 的乘积，将量词用到这个命题上又得到一个定义。

定义 12 整数 n 是偶数，当且仅当存在整数 k 使得 $n=2k$.

下面的例子表明存在量词所指的事物有可能多于一个，理解这一点是很重要的。

定义 13 设 n 是整数，如果存在整数 k，使得 $n=k^2$，那么 n 叫作平方数。

可以看到，如果整数 n（例如 $n=9$）是平方数，那么通常存在 k 的两个值满足 $n=k^2$（在 $n=9$ 时 $k=3$ 或 $k=-3$）。在第 11 章中将较多地讨论唯一性（即存在的事物是唯一的）。

还可以举出其它许多能用存在量词的例子。但从已举出过的例子已经可以看到，这样的命题通常都有相同的基本构造。每当量词"存在"或"有一个"出现时，命题总有下面的基本形式：

存在一个具有"某种性质"的"事物"，使得"某件事情发生"。

引号中的词由所考虑的具体命题而定，所以必须学会阅读、辨别和写出三者中的每一个。有时也把事物所具有的性质写在事物之后，并在它的前面加一个逗号。看以下例子。

(1) 存在一个整数 $x>2$，使得 $x^2-5x+6=0$。

事物：整数 x。

性质：$x>2$。

发生的事情：$x^2-5x+6=0$。

(2) 存在实数 x 和 y，$x>0$ 并且 $y>0$，使得 $2x+3y=8$ 和 $5x-y=3$。

事物：实数 x 和 y。

性质：$x>0$，$y>0$。

发生的事情：$2x+3y=8$ 和 $5x-y=3$。

在数学中经常用符号"$\exists$"作为"存在"一词的简写，并且用符号"$\ni$"作为词"使得"的简写。下面的例子说明怎样使用这两个符号。

3. ∃角 t, $\ni \cos t = t$.

事物：角 t.

性质：无.

发生的事情：$\cos t = t$.

可以看出，"使得"一词常常放在要发生的那件事情之前. 经过训练之后要能够流利地阅读和写出这样的命题.

在倒推过程中，当遇到有存在量词的命题时，要证明这个命题是真的，可以通过构造法来进行. 其想法是(通过猜测、制造以及设计出一个制作程序等等)构造所要求的事物.

当然，必须证明构造的事物具有(命题中)所说的那种性质，并且使(命题中)所说的那件事情发生. 怎样实际地构造所求的事物是并不完全清楚的，有时要经过试验和失败，有时一个想法就能够造出所要求的事物. 这一切都决定于所考虑的具体问题. 但必须用命题 A 提供的信息来帮助完成任务. 事实上，当存在量词出现时，在多数情况下要转向顺推过程来产生所求的事物. 在例 2 中已简单地运用过构造法，为了说清楚这个方法，下面再给出一个例子.

例 4 设 a, b, c, d, e, f 是实数，并且 $ad-bc\neq 0$，那么两个线性方程 $ax+by=e$ 和 $cx+dy=f$ 对 x, y 可解.

证明概要 进行倒推过程时，你应该知道命题 B 是不是具有所讨论的形式，即使存在量词并没有明显地出现. 这里的命题 B 也可以写成明显地含有存在量词的形式，例如写成"存在实数 x 和 y，使得 $ax+by=e$ 和 $cx+dy=f$". 在讨论问题时经常会出现含有"隐藏"量词的命题，应该细心地对待这样的命题.

使用构造法，关键是怎样作出两个实数 x 和 y，使得 $ax+by=e, cx+dy=f$. 如果你能巧妙地"猜测"到 $x=\dfrac{de-bf}{ad-bc}$,

$y=\frac{af-ce}{ad-bc}$当然很幸运，但是仍然必须证明所说的事情发生，这里是验证 $ax+by=e$ 和 $cx+dy=f$ 成立，要做到这一点是不难的．在猜测 x, y 的这些值时，已经用到 A 提供的信息，因为它们的分母不为零．

虽然这种"猜测和检验"的途径对于构造所要求的 x 和 y 是完全可以接受的，但它一点也没有说明这两个特殊的值是怎样产生的．而许多非构造性的证明倒是谈到了这一点．例如，要得到 x 和 y 的值，可以从方程 $ax+by=e$ 和 $cx+dy=f$ 开始．第一个方程乘以 d，第二个方程乘以 b，然后从第一个方程减去第二个方程得到 $(ad-bc)x=de-bf$，再利用 A 中的信息将后面这个方程除以 $ad-bc$，因为由假设这个数不是 0，这样便得到 $x=\frac{de-bf}{ad-bc}$．用类似的过程也可以得到 $y=\frac{af-ce}{ad-bc}$．这样的证明是令人信服的．即使对"用类似的过程可得到 $y=\frac{af-ce}{ad-bc}$"这句话你可以不很信服，但你可以作出直接证明，其中就有了 y 是怎样得到的细节．然而无论是直接猜测出 x, y 的值，还是用刚才的方法得出 x, y 的值，都必须验证对这两个值，有 $ax+by=e$ 和 $cx+dy=f$．只有作了这样的验证才是完全的证明．

例 4 的证明 将方程 $ax+by=e$ 乘以 d，方程 $cx+dy=f$ 乘以 b，然后相减，得到 $(ad-bc)x=de-bf$．类似地得到 $y=\frac{af-ce}{ad-bc}$．对于 x, y 的这两个值验证它们满足 $ax+by=e$ 和 $cx+dy=f$ 是不难的．//

对于处理有存在量词的命题，构造法并不是唯一可用的方法，但却是经常运用的方法，所以应该认真对待．为了能成功地运用构造法，你必须成为一个"建筑师"，并且运用你的创造

才能来构造具有所说性质的事物，也不要忘记还要验证所说的事情能够发生. 你的“构造基础”由 A 中所提供的信息组成.

习　　题

注：所有的证明都必须有证明概要和简练的证明.

4.1　对下列每个命题辨别出事物、性质和发生的事情.

(a) 喜马拉雅山中有一个高度超过 20000 英尺的山峰，它比世界上其他山峰都高.

(b) 存在整数 x 满足 $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$.

(c) 通过直线 l 外的点 p 存在平行于 l 的直线 l'.

(d) 在 0 和 $\frac{\pi}{2}$ 之间存在 t 使得 $\sin t=\cos t$.

(e) 在两个实数 x 和 y 之间存在不同的有理数 r 和 s，使得 $|r-s|<0.001$.

4.2　利用符号“$\exists$”和“$\ni$”写出下列命题.

(a) 如果三角形 XYZ 有两个边的长相等，那么三角形 XYZ 是等腰的.

(b) 给定角 t，能找到角 t'，它的正切比 t 的正切大.

(c) 在 n 个人中至少有两个人有同样多的朋友.

(d) n 次多项式 $p(x)$ 恰好有 n 个复根，设为 $r_1, r_2, \cdots, r_n$，对于它们有 $p(r_1)=\cdots=p(r_n)=0$.

4.3　(a) 证明存在整数 x，使得 $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$. 这样的整数唯一吗？

(b) 证明存在实数 x，使得 $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$. 这样的实数唯一吗？

4.4 求证：如果 a, b 和 c 都是整数，并且 $a|b$, $b|c$，那么 $a|c$。

4.5 求证：如果 s 和 t 都是有理数，并且 $t\neq 0$，那么 $\frac{s}{t}$ 也是有理数。

5. 量词——II：选择法

这一章讨论选择法，对出现量词"对所有的"的命题使用这种证明方法．在许多数学分支特别是在集合论中，出现这种命题是十分自然的．这里有必要用一些时间来讲点集合论的内容，因为它典型地说明量词"对所有的"的作用．

一个集合就是一些事物的总体，例如数1，4和7作为一个总体来看就形成一个集合．集合中每个单个的事物叫做这集合中的一个元素，并且说集合中的元素在这个集合中或属于这个集合．通常将元素放在一起(用逗点分开)再加一个大括号来表示这个集合．这样，数1，4和7组成的集合写成$\{1, 4, 7\}$．为了表示数4属于这个集合，可用数学符号写作"$4\in\{1, 4, 7\}$"，记号"$\in$"代替了"属于"这个词．类似地，为了表示2不是$\{1, 4, 7\}$的元素，写作"$2\notin\{1, 4, 7\}$"．

上述这种把元素都列举出来的方法虽然可以清楚地了解集合，但有些时候这是难以办到的，因为列起来太冗长了，例如写出1和100000之间的每个整数．当一个集合有无限多个元素时(例如大于或等于0的实数的集合)，即使你想要完全列出元素，实际上也不可能．好在有另一个方法来描述这种"大"集合，这个方法就是集合的构造表示法，它用语言和数学式子来规定集合中的元素．例如把所有大于或等于0的实数的集合写成$S=\{\text{实数 } x: x\geqslant0\}$，其中"："表示"使得"，而在"："后面的话或数学式子就规定了集合中元素所应具有的性质(集合的规定性质)．怎样才能知道一个特殊的事物属于或不属于这个集合呢？要回答这个问题只需检验这个事物是

否满足集合的规定性质. 如果满足则它属于这个集合, 否则它不属于这个集合. 例如, 要知道数 3 是否属于集合 S, 只要简单地把每一处的 x 都用 3 来代替, 检验 3 是否有给定的性质. 在这里 3 属于 S, 因为 3 是实数并且 $\geqslant 0$.

有时集合的性质不但出现在":"的右边, 同时也出现在左边. 这时要确定特殊事物属于集合, 就必须检验它满足左、右两边的规定性质. 例如, 设 $T=\{$实数 $x\geqslant 0: x^2-x-2\geqslant 0\}$, 则 -1 不属于 T, 因为虽然 -1 满足出现在":"右边的规定性质, 但不满足在":"左边的规定性质: -1 是不 $\geqslant 0$ 的.

从证明理论的观点看, 规定性质与定义起着完全相同的作用. 要回答抽象问题"怎样才能证明事物属于一个给定的集合?"只需验证这个事物满足所给集合的规定性质.

这样讨论集合时, 会出现任何事物都不满足规定性质的集合, 例如

$$\{\text{实数 } x\geqslant 0: x^2+3x+2=0\}$$

使 $x^2+3x+2=0$ 的实数只有 $x=-1$ 和 $x=-2$, 但是它们不满足":"左边的规定性质. 这样的集合叫做空集合, 就是没有元素的集合. 用符号"$\varnothing$"来表示空集合.

对集合论来说, 之所以要用量词"对所有的", 是因为同一个集合可以用几种方法来表示. 例如集合

$$S=\{\text{实数 } x: x^2-3x+2\leqslant 0\}$$

$$T=\{\text{实数 } x: 1\leqslant x\leqslant 2\}$$

其中 $1\leqslant x\leqslant 2$ 指的是 $1\leqslant x$ 并且 $x\leqslant 2$. 两个集合 S 和 T 是同一个, 自然应该是 S 的每个元素在 T 中出现, 并且反之也对. 使用量词"对所有的"("对每一个")便可给出以下的定义.

定义 14 集合 S 叫做集合 T 的子集合(记为 $S\subseteq T$), 当且仅当对集合 S 中的每一个元素 x, x 在集合 T 中.

定义 15 两个集合 S 和 T 叫做相等, 当且仅当 S 是 T

的子集合并且 T 是 S 的子集合.

像任何定义一样，这两个定义都能够用来回答抽象问题. 对第一个定义来说，要回答"怎样才能证明一个集合(即 S)是另一个集合(即 T)的子集合?"要证明 S 中的每一个元素 x 在 T 中. 下面可以看到，运用选择法将能够"证明 S 中的每一个元素 x 在 T 中". 对第二个定义，要回答"怎样才能证明两个集合 S 和 T 相等?"需要证明 S 是 T 的子集合，并且 T 是 S 的子集合.

在集合论中还有许多其他情形也使用量词"对所有的"，但是，由所说的这些例子已经看到，这种命题都有共同的结构. 当量词"对所有的""对每一个"或"对任意一个"或"对任何一个"出现时，命题都有以下的基本形式(请与上一章对照):

对每一个(或所有的)具有"某种性质"的"事物"，使得(或有)"某件事情发生". 引号中的词由所考虑的具体命题而确定，有时也不用"使得"和"有"这两个词. 必须学会阅读、书写和辨别这三个部分. 考察以下例子:

(1) 对每个角 t, $\sin^2 t+\cos^2 t=1$.

事物: 角 t.

性质: 没有.

发生的事情: $\sin^2 t+\cos^2 t=1$.

常常用记号"$\forall$"来作为"对所有的"(或"对每一个"等等)这些词的简写. 下面的例子说明了这个记号的用法.

(2) $\forall$ 实数 $y>0$, $\exists$ 一个实数 $x \ni 2^x=y$.

事物: 实数 y.

性质: $y>0$.

发生的事情: $\exists$ 一个实数 $x \ni 2^x=y$.

可以看到，逗号及"使得"(或"有")常常出现在发生的事情之前. 当使用词"使得"(或"有")时，有时也把事物所具有的性

质写在事物之后，并在它的前面加一个逗号．有时量词是"隐藏的"，例如，命题"严格地在 0 和 $\frac{\pi}{4}$ 之间的任意角的余弦大于它的正弦"．可以用前面那种说法将这个命题改写为："对每一个角 t，$0<t<\frac{\pi}{4}$，有 $\cos t>\sin t$"．必须经过练习方能达到熟练地阅读和写出这样的命题．

在倒推过程中，如果遇到的命题中出现量词"对所有的"，那么要证明这个命题是真的，方法就是列出具有（命题中）所说性质的所有事物，然后对它们中的每一个试着证明（命题中）所说的事情发生．当事物只有有限个时，这是一个合适的方法．然而在更多的时候这是办不到的，因为列出所有的事物太冗长，更不用说有无穷多个事物的情形了．在集合论中已经遇到过这种困难了，在那里是用规定性质描述集合的办法克服了这种困难．这里将用选择法来克服困难．

选择法可以想像成一个证明机器，只要对具有所说性质的一个事物实际检验出所说的事情发生，那么对每一个具有所说性质的事物，它就有重复进行的能力．如果有了这样的机器，就不必列出全部事物（可能是无穷的）来检验了．因为已经知道机器总是可以这样做的．选择法也说明了怎样进行证明机器的内部工作．

为了了解选择法的机器，让我们自已来起证明机器的作用．这就是我们必须有能力取出具有所说性质的任意事物和断定所说的事情发生（参看图 6）．因此，我们可以认为在所有这样的事物中取出了一个，但要注意的是你并不知道它究竟是它们中的哪一个，你所知道的只是它具有所说的性质．然后利用这一性质来断定所说的事情发生．为此由所说的性质出发作顺推和由要发生的事情出发作倒推．换句话说，所谓选择法就是选择一个具有所说性质的事物，然后用顺推-倒推

法来断定对所选择的这个事物所说的事情发生. 这样证明机器就有能力对具有这种性质的每个事物给出重复的证明.

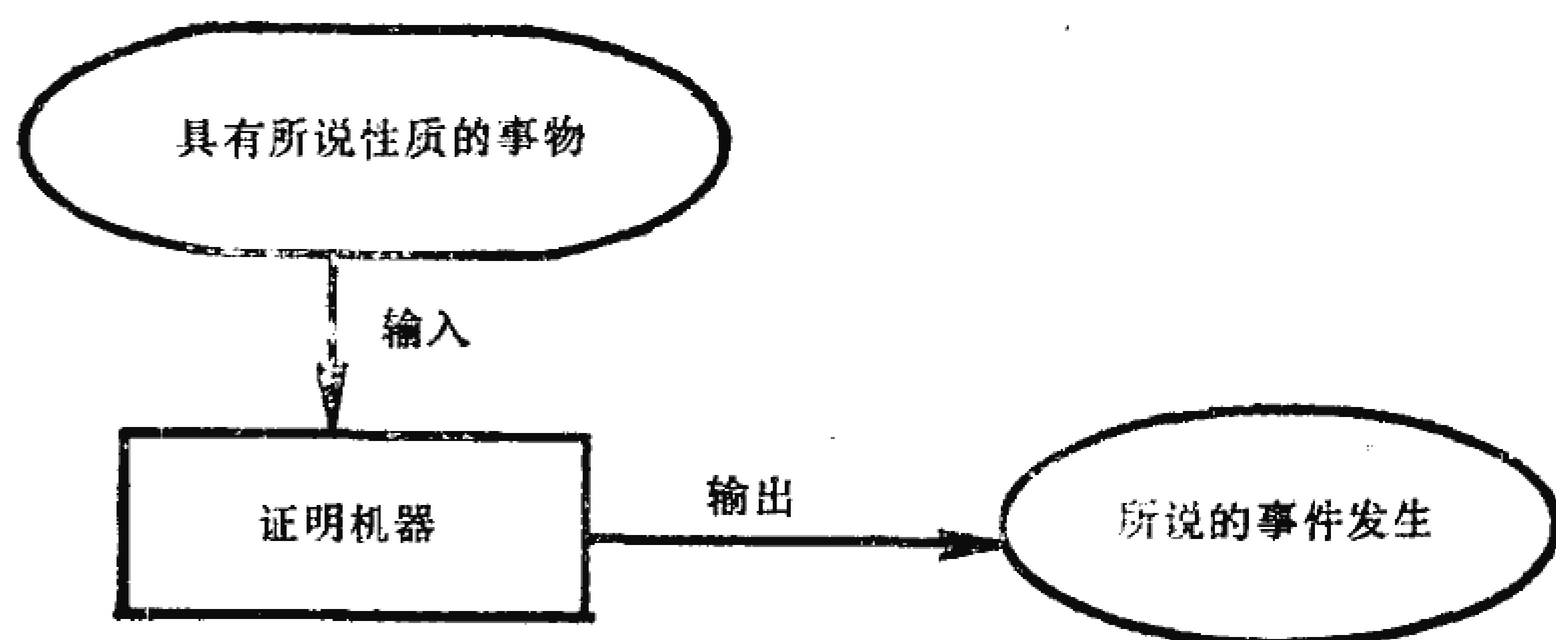


图 6 关于选择法的证明机器

例如,在某个证明中,要证明对所有具有性质 $x^2-3x+2\leqslant0$的实数 x 有 $1\leqslant x\leqslant2$. 用选择法时应该在这样的实数中选择一个,譬如是 x',它具有所说的性质(这里是$(x')^2-3x'+2\leqslant0$). 由$(x')^2-3x'+2\leqslant0$ 这一事实出发作顺推, 然后断定对于 x' 所说的事件发生,也就是有 $1\leqslant x'\leqslant2$.

在这里用记号"x'"是为了区别于一般事物"x", 以表示它是从一般事物"x"中选择出来的. 这种区别常常被忽略(即一般事物与选择出的事物都用同一个记号),所以在理解记号的意义时必须谨慎小心. 看下面的例子.

例 5 设 $S=\{$实数 x: $x^2-3x+2\leqslant0\}$

$T=\{$实数 x: $1\leqslant x\leqslant2\}$

那么 $S=T$.

证明概要 顺推-倒推法提出抽象问题"怎样才能证明两个集合(就是 S 和 T)相等?"定义 15 提供的回答是必须证明 S 是 T 的子集合并且 T 是 S 的子集合. 所以首先试着证明 S 是 T 的子集合,然后证明 T 是 S 的子集合.

为了证明 S 是 T 的子集合，提出抽象问题"怎样才能证明一个集合(即 S)是另一个集合(即 T)的子集合"?再一次用前面的定义作回答，必须证明对 S 中所有的 x，有 x 在 T 中．这个新命题 B_1 正好是含有量词"对所有的"的命题，所以应该用选择方法：取一个有所说性质的事物，并证明所说的事情发生．在这里应该选择 S 中的一个元素，记为 x，利用 x 在 S 中的事实(就是它满足 S 的规定性质)，同时利用 A 中的信息来证明 x 在 T 中． 注意，不能在 S 中选取一个特定的元素，例如 $\frac{3}{2}$．也要注意记号 x 的双重用法，它表示的既是一般的又是选择出的事物．

命题"x 在 T 中"现在成为一个新命题 B_2，再将抽象过程应用到 B_2，得到抽象问题"怎样才能证明一个元素(即 x)属于一个集合(即 T)"?要回答这个问题，必须证明 x 满足 T 的规定性质(即 $1\leqslant x\leqslant 2$)，这只有尽力来直接证明了．

现在转向顺推过程． 可以用 A 中的信息来证 $1\leqslant x\leqslant 2$，因为已经假设 A 是真的．还可以利用附加的信息，这就是作倒推时用了选择法，而选择的 x 是 S 中的元素． 利用 x 在 S 中的事实，由集合 S 的规定性质便得到 $x^2-3x+2\leqslant 0$．分解因式后得到 $(x-2)(x-1)\leqslant 0$．而两个数之积 $\leqslant 0$，只可能一个 $\geqslant 0$，另一个 $\leqslant 0$．换句话说或者 $x-2\geqslant 0$，$x-1\leqslant 0$ 或者 $x-2\leqslant 0$，$x-1\geqslant 0$．第一种情况不会出现，因为如果这样就有 $x\geqslant 2$ 和 $x\leqslant 1$，这是不可能的．因此第二种情况必须出现，即 $x\leqslant 2$ 和 $x\geqslant 1$．但这正好是倒推过程得到的那个最后命题，因而它证明了 S 是 T 的子集合．为了完全证出 $S=T$，还要证明 T 是 S 的子集合，这一部分留作习题．

可以看到，当用选择法时，得到的附加信息已经放到 A 是真的这个假设中．这样在顺推过程中也能够利用这个附加

信息.

例 5 的证明 为了证明 $S=T$，将证明 S 是 T 的子集合以及 T 是 S 的子集合. 为了看出 S 是 T 的子集合，令 x 是 S 中的元素(用"令"这个词时，常常表示已经使用了选择法.)所以 $x^2-3x+2\leqslant 0$，从而 $(x-2)(x-1)\leqslant 0$. 这就有：或者 $x-2\geqslant 0$，$x-1\leqslant 0$ 或者 $x-2<0$，$x-1\geqslant 0$. 但前者不可能发生，因为如果是这样的话，就有 $x\leqslant 2$，$x\geqslant 1$. 由此 x 在 T 中. T 是 S 的子集合的证明就省略了. //

选择法是用来处理命题中出现了量词"对所有的"的证明方法. 运用这个方法时，选择一个具有所说性质的事物，把这一点作为信息附加到 A 中，再通过顺推-倒推法来证明所说的事情发生.

习　　题

注：所有证明都必须有证明概要和简练的证明.

5.1　对下列定义，辨别出事物、性质和发生的事情.

(a) 设 $f(x)$ 是函数，x^* 是实数，如果对每一个实数 x 有 $f(x)\leqslant f(x^*)$，那么说 x^* 是 $f(x)$ 的最大值点.

(b) 设 f 和 g 都是单变量函数，S 是某些实数组成的集合，如果对集合 S 中的每一个元素 x，有 $g(x)\geqslant f(x)$，那么说在集合 S 上 $g\geqslant f$.

(c) 设 S 是某些实数组成的集合，u 是实数，如果对 S 中的所有 x，有 $x\leqslant u$，那么说 u 是 S 的上界.

(d) 设 S 是某些实数组成的集合. 如果实数 u 是 S 的上界，并且 $\forall$ 实数 $\varepsilon>0$，$\exists x\in S\ni x>u-\varepsilon$，那么说 u 是 S 的最小上界.

(e) 设 C 是某些实数组成的集合，如果对 C 中每一个 x

和每一个 y, 以及对每一个实数 t, $0\leqslant t\leqslant 1$, 使得 $tx+(1-t)y$ 是 C 中的元素, 那么说 C 是凸集合.

(f) 设 f 是单变量函数，如果对每一个实数 x 和每一个实数 y, 以及对每一个实数 t, $0\leqslant t\leqslant 1$, 推出

$$f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$$

那么说 f 是凸函数.

(g) 设 f 是单变量函数, x 是实数, 如果对每一个实数 $\varepsilon>0$, 存在一个实数 $\delta>0$, 使得对所有具有性质 $|x-y|<\delta$ 的实数 y, 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, 那么说 $f(x)$ 在点 x 处连续.

(h) 设 x, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, …是实数. 如果对所有实数 $\varepsilon>0$, $\exists$ 一个整数 $k'\ni\forall$ 整数 $k>k'$, 有 $|x^{(k)}-x|<\varepsilon$, 那么说数列 $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, …收敛于 x.

5.2 对习题5.1的每一个小题, 试述怎样用选择法. 要求用不同的记号来区别一般事物和从一般事物中选出的事物. 例如对习题5.1(a), 为了证明 x^* 是函数 f 的最大值点, 应该选择一个实数, 记为 x', 然后对它证明 $f(x')\leqslant f(x^*)$. 这样, 将选择法用到5.1(a)上的回答是: "令 x' 是实数, 要证明 $f(x')\leqslant f(x^*)$".

5.3 考察证明题"对具有某种性质的每一个 x, 有某件事情发生". 对这个题运用选择法和运用顺推-倒推法证明"如果 x 是有所说性质的事物, 那么所说的事情发生". 这两种作法为什么是相同的? 引号中的两个命题有怎样的关系?

5.4 尽可能利用简写符号 $\forall$, $\exists$, $\ni$ 改写以下命题.

(a) 有的山峰比别的每一个山峰都高.

(b) 如果 t 是角, 那么可推出 $\sin 2t=2\sin t\cos t$ (提示: 利用习题5.3).

(c) 任意两个非负实数 p, q 的平方根都小于等于它们的和的一半.

(d) 如果 x 和 y 是实数，$x<y$，那么存在一个有理数 r，使得 $x<r<y$.

5.5 要证明以下命题是用选择法还是用构造法？如果两个方法都用，那么按什么顺序来用？同时说明是怎样具体用的？

(a) 存在实数 $M>0$，使得对实数集合 S 中的所有元素 x，有 $|x|\leqslant M$.

(b) 对所有实数 $M>0$，在实数集合 S 中存在一个元素 x，使得 $|x|>M$.

(c) $\forall$实数 $\varepsilon>0$，$\exists$一个实数 $\delta>0\ni\forall|x-y|<\delta$ 的 x 和 y 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$（其中 f 是单变量函数）.

5.6 对例 5 的 S 和 T，证明 $T\subseteq S$.

5.7 求证：对每一个实数 $x>2$，存在一个实数 $y<0$，使得 $x=\dfrac{2y}{1+y}$.

5.8 求证：如果 m 和 b 是实数，f 是函数 $f(x)=mx+b$，那么 f 是凸函数（提示：利用习题 5.1(f)中的定义）.

6. 量词——III. 归纳法

在上一章中，已经学过当命题 B 中出现量词“对所有的”时，怎样运用选择法. 命题 B 还有一种很特殊的形式，对它可以运用一种单独的证明方法，这就是众所周知的数学归纳法. 当 B 具有以下形式时最适合用归纳法. 这种形式是:

对每一个整数 $n \geqslant 1$，“某件事情发生”. 这里所发生的事情是与 n 有关的某个命题，例如下面的命题.

对所有整数 $n \geqslant 1$，$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$，

其中 $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n$.

在考虑能否用数学归纳法时，要看命题是否有关键词“整数”和“大于或等于 1”.

为了证明这种命题，可以这样设想: 从 $n=1$ 开始，对每个整数作一个命题，作出无穷多个，然后分别证明每一个命题. 对于列在前面的命题通常是容易验证的，但问题是怎样验证第 n 个和第 n 个以后的命题. 例如，对所说的例子，列出的命题是

$$P(1):\quad \sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2}，\text{即 } 1=1$$

$$P(2):\quad \sum_{k=1}^{2} k = \frac{2(2+1)}{2}，\text{即 } 1+2=3$$

$$P(3):\quad \sum_{k=1}^{3} k = \frac{3(3+1)}{2}，\text{即 } 1+2+3=6$$

$$\vdots$$

$$P(n):\quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P(n+1):\quad \sum_{k=1}^{n-1}=\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

归纳法就是证明这种可列成无穷多个命题的巧妙方法。像选择法一样，归纳法可想像成一个自动解题的机器，从 $P(1)$ 开始，它按照一个程序逐步地证明要证的每个命题．它是这样工作的：用验证 $P(1)$ 是真的来开动机器，对于所说的例子验证 $P(1)$ 是很容易的．然后将 $P(1)$ 输入机器．它利用 $P(1)$ 是真的这个事实自动证明 $P(2)$ 是真的．再取 $P(2)$ 并将它输入机器，它再一次利用 $P(2)$ 是真的这个事实得到 $P(3)$ 是真的的结论．如此继续下去(参看图 7)．

可见，当机器在证明 $P(n+1)$ 是真的时已经(由前一步)证明了 $P(n)$ 是真的．因此，要造出这样的机器，可以假设 $P(n)$ 是真的，但重要的任务是说明 $P(n+1)$ 也是真的．同时记住，为了使整个过程有一个开头，必须验证 $P(1)$ 是真的．

也就是说，使用归纳法的证明由两步组成，第一步是验证命题 $P(1)$ 是真的，将命题中的每一个 n 直接用 1 来代替就能够办到．通常要验证一个复杂的命题在 $n=1$ 时是真的，只要对这个命题作一些不大的改写就行了．

第二步要复杂得多，要求利用 $P(n)$ 是真的的假设来得到 $P(n+1)$ 是真的的结论．这一步有一个标准的作法．首先写出命题 $P(n+1)$．因为已经假设 $P(n)$ 是真的并且需要断定 $P(n+1)$ 是真的，所以应该试着将命题 $P(n+1)$ 用 $P(n)$ 来改写(像下面所作的那样)，改写之后就可以利用 $P(n)$ 是真的的假设来进行．当证明出 $P(n+1)$ 是真的，整个证明也就完成了．

例 6 对每个整数 $n\geqslant 1$，$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$．

证明概要 用归纳法时，将命题用 $P(n)$ 来表示是有益的. 在这里是

$$P(n):\quad \sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

归纳法的第一步是验证 $P(1)$，在 $P(n)$ 中每一处都用 1 来代替 n，得到

$$P(1):\quad \sum_{k=1}^{1} k=\frac{1(1+1)}{2}.$$

这个命题容易验证，因为

$$\sum_{k=1}^{1} k=1=1\frac{(1+1)}{2}.$$

这一步通常都是很容易的，在简练的证明中，常用简单说法"对 $n=1$ 命题显然是真的"而将这一步的证明省略.

第二步是很复杂的，因为必须利用 $P(n)$ 是真的的假设来得到 $P(n+1)$ 是真的的结论. 最好的办法是将 $P(n)$ 中每一处的 n 用 $n+1$ 代入，并且必要的话作一点改写. 这里是

$$P(n+1):\quad \sum_{k=1}^{n+1} k =\frac{1}{2}(n+1)[(n+1)+1] =\frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

为了得到 $P(n+1)$ 是真的这一结

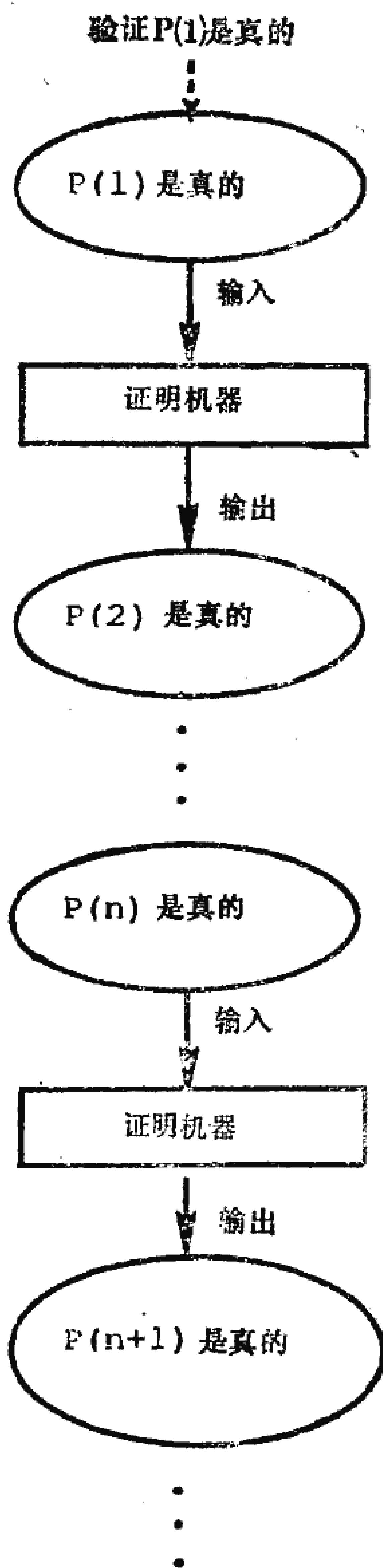


图 7 关于归纳的证明机器

论，应该把 $P(n+1)$ 的等号左边表示成等号右边的形式．要做到这一点可以利用命题 $P(n)$ 中的信息，将 $P(n+1)$ 的等号左端与 $P(n)$ 的等号左边联系起来，然后就可以利用 $P(n)$ 的等号右端了．在此例中

$$\sum_{k=1}^{n+1} k=\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)+(n+1).$$

现在利用 $P(n)$ 是真的的假设，将 $\sum_{k=1}^{n} k$ 用 $\frac{n(n+1)}{2}$ 代替，得到

$$\sum_{k=1}^{n+1} k=\left[\frac{1}{2} n(n+1)\right]+(n+1).$$

剩下的就是作一点改写，将 $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]+(n+1)$ 写成 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$，这样就得到 $P(n+1)$ 的等号右端．所作的改写是以下的恒等变换

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(n)(n+1)+(n+1) &= \frac{1}{2}(n^2+n)+\frac{1}{2} 2(n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n^2+3n+2) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2).\end{aligned}$$

总结起来便有

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+(n+1) &= (1+\cdots+n)+(n+1) \\ &= \frac{1}{2} n(n+1)+(n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n^2+3n+2) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2).\end{aligned}$$

有没有能力将 $P(n+1)$ 与 $P(n)$ 联系起来，从而能够利用 $P(n)$ 是真的的归纳假设，决定了归纳法证明能不能取得成功．假如不能将 $P(n+1)$ 与 $P(n)$ 联系起来，那只好寄希望于别的

证明方法了.

例 6 的证明 对于 $n=1$, 命题显然是真的. 假设命题对于 n 是真的$\left(\text{就是说 } 1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\right)$, 那么

$$
\begin{aligned}
1+2+\cdots+n+(n+1)&=(1+\cdots+n)+(n+1)\\
&=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}2(n+1)\\
&=\frac{1}{2}(n^2+3n+2)\\
&=\frac{1}{2}(n+1)(n+2).
\end{aligned}
$$

这就是 $P(n+1)$. //

运用归纳法时, 并不一定要求 n 的第一个值是 1. 例如对于命题"对所有整数 $n\geqslant5$, $2^n>n^2$"也能用归纳法证明. 这只需作这样的修改: 用 n 的第一个值验证 $P(n)$ 来开动证明机器. 对所说的命题, 第一个值是 $n=5$, 所以要验证 $2^5>5^2$ (这是当然成立的, 因为 $2^5=32$, 而 $5^2=25$). 归纳法证明的第二步不变, 仍然是证明: 如果 $P(n)$ 是真的 (即 $2^n>n^2$), 那么 $P(n+1)$ 也是真的 (即 $2^{n+1}>(n+1)^2$). 在进行这一步证明时, 必要时也要利用 $n\geqslant5$ 的事实.

当发生以下情况时还可以将归纳法的基本形式作另一种修改, 这就是不能将 $P(n+1)$ 和 $P(n)$ 联系起来, 但却能将 $P(n+1)$ 和 $P(j)$ 联系起来, 这里的 $j<n$. 在这种情况下, 希望利用 $P(j)$ 是真的来证明 $P(n)$ 是真的. 但实际上能假设 $P(j)$ 是真的吗? 回答是肯定的. 为了理解为什么会这样, 回忆一下证明机器. 当机器要证明 $P(n+1)$ 是真的时, 已经肯定了命题 $P(1), \cdots, P(j), \cdots, P(n)$ 都是真的 (见图 7). 因此, 当要证明 $P(n+1)$ 是真的时, 能够假设 $P(n)$ 以及它前面的所有命题都是真的. 这种证明方法叫做一般归纳法.

在应用中，归纳法是一个很有用的方法．但也要了解到，归纳法不能帮助你通过特殊的命题 $P(1)$，$P(2)\cdots$ 来发现一般命题 $P(n)$ 所应有的形式．归纳法只能用来验证一个给定的命题 $P(n)$ 对 $\geqslant$ 某个开始整数的所有整数 n 来说是真的．归纳法成功的关键在于有能力将 $P(n+1)$ 与 $P(n)$ 或与 $P(n)$ 之前的某个命题联系起来，还要验证命题对 n 所取的第一个值是真的．

习　　题

注：这一章的证明不要求写证明概要．

6.1 对以下命题能直接用归纳法吗？如果不能用，请说明理由．

(a) 对每一个正整数 n，8 整除 $5^n+2\cdot3^{n-1}+1$．

(b) 存在一个整数 $n\geqslant0$，使得 $2n>n^2$．

(c) 对每个整数 $n\geqslant1$，可推出 $1\,(1!)+2\,(2!)+\cdots+n(n!)=(n+1)!-1$（注意：$n!=n(n-1)\cdots1$）．

(d) 对每个整数 $n\geqslant4$，$n!>n^2$．

(e) 对每个实数 $n\geqslant1$，$n^2\geqslant n$．

6.2 (a) 在什么情况下并且为什么需要用归纳法代替选择法？

(b) 为什么不能将归纳法用于以下形式的命题：对每一个"具有某种性质"的"事物"，"某件事情发生"．

6.3 用归纳法证明，对每一个整数 $n\geqslant1$ 有 $1\,(1!)+\cdots+n(n!)=(n+1)!-1$．

6.4 用归纳法证明，对每一个整数 $n\geqslant5$，$2^n>n^2$．

6.5 用归纳法证明，$n\geqslant1$ 个元素的集合有 2^n 个子集合（包括空集合在内）．

6.6 不用归纳法证明，对每个整数 $n\geqslant1$，$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

6.7 用证明以下两步的方法证明，对每一个整数 $n\geqslant1$，6 整除 n^3-n. 这两步是：(1)对 $n=1$ 命题是真的；(2)如果命题对 $n-1$ 是真的，那么它对 n 也是真的.

6.8 试述一个修改了的归纳法，能够用它来证明以下形式的命题.

(a) 对 $\leqslant$ 某个整数 k 的所有整数，某件事情发生.

(b) 对每个整数，某件事情发生.

(c) 对每个正奇数，某件事情发生.

6.9 下述“所有马都有相同颜色”的证明有什么错误？

证明 设有 n 匹马. 当 $n=1$ 时命题显然是真的，因为不管是什么颜色，一匹马的颜色是相同的. 假设任意 n 匹马的马群有相同的颜色，现在考察有 $n+1$ 匹马的马群. 在它们当中任取 n 个，归纳假设说明这 n 匹马有相同颜色，譬如说是棕色的. 问题仅出在剩下那匹“不知颜色的马”是什么颜色. 因此，再考察另一个马群，它由所说的 $n+1$ 匹马中的 n 匹组成，但其中包括了那匹不知颜色的马. 再一次由归纳假设，这群马也必须有相同的颜色. 因此这群马的颜色都是棕色的，从而这匹不知颜色的马也必定是棕色的.

7. 量词——IV：特殊化法

在前三章中，已经看到当命题 B 中出现量词时是怎样进行证明的. 这一章将提出一种方法来阐明在命题 A 中出现量词时怎样进行证明. 当命题 A 中出现量词“存在”时，它总有下面的标准形式：

存在一个具有“某种性质”的“事物”，使得“某件事情发生”.

当用顺推-倒推法证明“A 推出 B”时，已经假定 A 是真的，便可以直接利用这些信息假设确实存在一个具有这种性质的事物，使所说的事情发生. 在做证明时可以说：“令 x 是一个具有这种性质的事物，而且它使所说的事情发生….”在顺推过程中利用这个事物的存在而得出 B 是真的的结论.

更有兴趣的是命题 A 中出现量词”对所有的”的情形，在这种情形下，A 的标准形式是：

对所有具有“某种性质”的“事物”，使“某件事情发生.”

为了利用这种信息，有一个典型的方法，称为特殊化法. 由于假设 A 是真的，便知道对于所有具有这种性质的事物，会使所说的事情发生. 因此，如果在倒推过程中遇到一个具有这种性质的事物，那么用 A 中的信息就能够断定对于这个特殊的事物，这件事情一定发生，从而可用这一点来得出 B 是真的的结论. 换句话说，可以把命题 A 特殊化到一个具有这种性质的特殊事物上. 例如，如果知道对于每一个角 t，有

$$\sin^2 t+\cos^2 t=1$$

那么对于一个特殊的角，比如$t=\frac{\pi}{4}$，便能够得出结论

$$\sin^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}=1.$$

下面将用一个例子来说明怎样应用特殊化法.

定义 16 如果对于某些实数组成的集合 T 的所有元素 t，有 $t\leqslant u$，那么说实数 u 是集合 T 的一个上界.

例 7 如果 R 是某些实数组成的集合 S 的子集合，u 是 S 的一个上界，那么 u 是 R 的一个上界.

证明概要 顺推-倒推法提出的抽象问题是"怎样才能证明一个实数(就是 u)是某些实数组成的集合(就是 R)的一个上界?"用定义 16 来回答这个问题，应该证明对于 R 中所有元素 r，有 $r\leqslant u$. 倒推过程中出现量词"对所有的"，则提示我们用选择法. 于是在 R 中选择一个元素，设是 r. 对于这个 r，必须证明 $r\leqslant u$.

现在转到顺推过程，将看到怎样用特殊化法得到所希望的结论，即 $r\leqslant u$. 由 R 是 S 的子集合的假设，根据定义 14，知道 R 中的每一个元素都在 S 中. 在倒推过程中，已经有了 R 中的特殊元素 r，因此用特殊化法就得到了 r 在 S 中的结论.

又假设 u 是 S 的一个上界，根据定义 16，这就意味着对于 S 中的每一个元素 s，有 $s\leqslant u$. 量词"对每一个"在顺推过程中出现，提示我们用特殊化法. 前面已经证明了 r 是 s 的一个元素，所以用特殊化法就能断定 $r\leqslant u$. 因为"$r\leqslant u$"是在倒推过程中最后得到的命题. 所以证明到此完成.

注意，当用特殊化法时，必须非常仔细地保持记法和记号. 同时，将命题特殊化到某个特殊事物上时，这个事物一定

要具有所说的那种性质，因为只有这样才能得出所说的这件事情发生的结论.

在下面的简练证明中，没有详细指出使用的方法是顺推-倒推法，还是选择法和特殊化法.

例7的证明 要证 u 是 R 的一个上界，令 r 是 R 中的一个元素（用"令"这个词表明已经使用了选择法）. 根据假设，R 是 S 的子集合，所以 r 也是 S 中的元素（此处使用了特殊化法）. 此外根据 u 是 S 的一个上界的假设，对 S 中每一个元素 s，有 $s\leqslant u$. 因为 r 是 S 中的一个元素，所以 $r\leqslant u$，（这里再一次用了特殊化法）. //

为了处理在 A 或 B 中出现的量词，这一章和前三章提出了各种方法. 究竟该使用哪种方法，通常由命题的形式来决定. 当 B 中出现量词"存在"时，用构造法来产生所希望的事物. 当 B 中出现量词"对所有的"时用选择法. 但要将这种情形除外，这就是要证明的 B 是从某一个整数开始对所有整数成立的命题. 在这种情形下，归纳法似乎更有效，只要能够将对 $n+1$ 的命题与对 n 的命题相联系. 最后，如果在 A 中出现量词"对所有的"，通常都使用特殊化法. 在用特殊化法时，要证实所考虑的特殊事物确实具有所说的性质，因为只有这样，所说的事情才会发生.

到此为止，所有的材料都是围绕着顺推-倒推法而组织的. 下面将看到用来证明"A 推出 B"的另外一些方法.

习 题

注：所有的证明都必须有证明概要和简练的证明.

7.1 解释选择法和特殊化法两者之间的不同.

7.2 对下面每个命题和给出的事物,这些事物必须具有什么性质才能使用特殊化法?当事物具有所给性质时,关于这个事物能得出什么结论?

(a) 命题: $\forall$整数 $n\geqslant 5$, 有 $2^n>n^2$.

给出的事物: m.

(b) 命题: 对于 S 中的每一个元素 x, 如果 $|x|<5$, 那么 x 在 T 中.

给出的事物: y.

(c) 命题: $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, $\ni \forall$ 满足

$$|x-y|<\delta \text{ 的 } y, \text{有} |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

(其中 δ, ε, x 和 y 都是实数, f 是单变量函数).

给出的事物: ε'.

(d) 命题: 任何一个面积是其对角线长度平方的一半的矩形是正方形.

给出的事物: 四边形 $QRST$.

(e) 命题: 对任何角 t, $0<t<\dfrac{\pi}{4}$, 有 $\cos t>\sin t$.

给出的事物: 三角形 RST 的角 S.

7.3 求证: 如果 R 是 S 的子集合, 并且 S 是 T 的子集合, 那么 R 是 T 的子集合.

7.4 求证: 如果 S 和 T 是凸集合(见习题 5.1 (e)), 那么 S 与 T 的交集合是一个凸集合.

7.5 求证: 如果 f 是单变量的凸函数(见习题5.1(f)), 那么对于所有实数 $s\geqslant 0$, 函数 sf 是凸函数(此处函数 sf 在点 x 的值是 $sf(x)$).

7.6 求证: 如果 f 是单变量的凸函数(见习题 5.1(f)), y 是一个实数, 那么 $C=\{$实数 x: $f(x)\leqslant y\}$是凸集合.

7.7 求证：1是集合S的最小上界，其中$S=\left\{1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}\cdots\right\}$（见习题5.1(d)。提示：集合$S$可以写成$S=\left\{\text{实数 } x\text{：存在整数 } n\geqslant 2\text{，使得 } x=1-\frac{1}{n}\right\}$）。

8. 矛 盾 法

尽管顺推-倒推法很有用，但是由于某些原因，仍然有不能用顺推-倒推法完成的证明．看下面的例子．

例 8 如果 n 是整数，并且 n^2 是偶数，那么 n 也是偶数．

证明概要 顺推-倒推法提出这样的抽象问题："怎样才能证明一个整数(即 n)是偶数？"回答是证明存在一个整数 k，使得 $n=2k$．量词"存在"的出现提示用构造法，所以用顺推过程试图找出所需要的整数 k．

根据 n^2 是偶数的假设，那么存在一个整数，不妨设为 m，使得 $n^2=2m$．因为我们的目的是要找出一个整数 k，使得 $n=2k$，自然要在等式 $n^2=2m$ 的两边求平方根，便得到 $n=\sqrt{2m}$．但是怎样将 $\sqrt{2m}$ 写成 $2k$ 的形式呢？看来顺推-倒推法已经失败了！

例 8 的证明 用将要学到的方法给出这个题目一个简单的证明，把它留作习题．//

在放弃用顺推-倒推法证明之前，你还可以试用几种其它方法，也许能侥幸地完成证明．

在这一章中，我们将讲述一种新的证明方法，叫作矛盾法，同时指出在什么情况下使用和怎样使用这种方法．

使用矛盾法也象使用顺推-倒推法一样，首先假设 A 是真的，然而要想得到 B 的是真的这一结论，可提出一个简单的问题："为什么 B 不是假的？"．要承认 B 是真的，就必须有某个为什么 B 不能是假的的理由．矛盾法的目的正是要找到这个理由．换句话说，矛盾法的证明思想是假设 A 是真的，

B 是假的，再看看为什么这种情况是不可能发生的. 关键就在于"看看为什么这种情况不能发生". 例如：设想由于假设 A 是真的并且 B 是假的(今后写作非 B——参看第 3 章)，根据某种理由推出 $0=1$ 的结论！?! 难道这还不能使你相信 A 是真的并且 B 是假的是不可能的吗？因此用矛盾法的证明是假设 A 是真的并且非 B 是真的，再想法利用这个信息推出同某个一定是真的的事情相矛盾.

我们知道，命题"A 推出 B"除了 A 是真的 B 是假的这一情况外都是真的. 这正是矛盾法的另一个根据. 用矛盾法证明就是要排除 A 是真的 B 是假的这种情况，所用的方法是假设这种情况实际发生而推出一个矛盾.

在这里自然会提出几个问题：

(1) 应该寻找什么样的矛盾？

(2) 怎样正确地用 A 是真的，并且 B 是假的这一假设来推出矛盾？

(3) 为什么和在什么时候能够用这种方法来代替顺推-倒推法？

第一个问题是非常难回答的，因为没有有效的通用方法. 对每个题目引出其自身特有的矛盾，通常需要创造力、洞察力、坚持性，有时甚至是凭侥幸才能得到矛盾.

表 4 顺推-倒推法和矛盾法的比较

方法	假设	结论
顺推-倒推法	顺推 $A\cdots\cdots\rightarrow\cdots$	倒推 $\leftarrow\cdots\cdots B$
矛盾法	$\left.\begin{array}{l}A\\ \text{非 } B\end{array}\right\}$ 顺推 $\cdots\cdots\rightarrow\cdots$	* (矛盾)

至于第二个问题，通用的方法是从 A 并且非 B 是真的这一假设出发作顺推，以推出一个矛盾. 下面将举例说明.

上面的讨论也回答了为什么愿意用矛盾法代替顺推-倒推法．用顺推-倒推法时，只假设 A 是真的，而在矛盾法中，可假设 A 和非 B 两者都是真的．因此是以两个命题而不是一个命题作为顺推时的根据(见表 4)．但是在另一方面，用矛盾法却不能肯定究竟将推出什么样的矛盾．

作为一般规则，当命题非 B 给出一些有用的信息时可用矛盾法．至少有两种情况可考虑用矛盾法，回忆例 8 中的命题 B："n 是偶数"．显然，一个整数只可能是奇数或偶数．当假设 B 不是真的时（即 n 不是偶数），那么 n 只可能是奇数．这里，命题非 B 已经给出一些有用的信息了．一般来说，当命题 B 是两个相反的可能之一时(象在例 8 中那样)，矛盾法可能是有效的．因为，通过假设非 B，将知道另一种情况肯定会发生，利用这点就会得到矛盾．

矛盾法可能成功的第二种情形是像下面的例子那样，命题 B 中出现了否定词，即它恰好是某个熟悉命题的否定．

例 9　如果 r 是实数，并且 $r^2=2$．那么 r 是无理数．

证明概要　注意到例 9 的结论能被重新写成"r 不是有理数"是很重要的．这样，否定词就出现了，新写出的结论恰好是"r 是有理数"的否定．用矛盾法假设 A 与非 B 都是真的．这意味着可以假设 $r^2=2$，而且 r 是有理数．现在用这个信息就一定可以引出矛盾．

进行顺推，运用关于有理数的定义 7，存在整数 p 和 q，并且 $q\neq0$，使 $r=\dfrac{p}{q}$．这时仍然不知道要推出什么样的矛盾，这需要一些创造力，并且知识和经验也是有帮助的．可以假设 p 和 q 除 ±1 外没有公因子（即除 ±1 外没有整数能整除 p 和 q)．如果有公因子可以将这个整数从分子 p 和分母 q 中约去．现在通过证明 2 是 p 和 q 的公因子就可以得到矛盾．为

此证明 p 和 q 是偶数，即 2 能同时整除它们.

再顺推下去，因为 $r=\frac{p}{q}$，所以 $r^2=\frac{p^2}{q^2}$. 但假设 $r^2=2$，所以 $2=\frac{p^2}{q^2}$. 顺推过程的其余部分主要是将 $2=\frac{p^2}{q^2}$ 改写成其他形式，以断定 p 和 q 都是偶数. 具体说来，用 q^2 乘这个等式的两边，得到 $2q^2=p^2$. 不论 q 是什么样的整数，$2q^2$ 一定是偶数. 因为 $p^2=2q^2$，所以 p^2 也一定是偶数.

继续顺推下去，由 p^2 是偶数这一事实得到什么有用的信息呢？当 p 的平方是偶数时，只有 p 是偶数时才有可能，这就是希望得到的结论之一. 前面说过，一个证明能被承认应该有使人信服的理论根据. 这里最后的一句话可能不会使人相信 p 是偶数. 如果是这样的话，就需要给出更多的细节. 写证明通常应当留意读者的想法. 如果需要进一步使人相信 p 是偶数，可参看例 8.

还要证明 q 也是偶数，仍然使用顺推法，因为 p 是偶数，由偶数的等价定义，所以存在整数 k，使得 $p=2k$. 由 $2q^2=p^2$ 有 $2q^2=(2k^2)=4k^2$，也就是 $q^2=2k^2$. 不论 k 是什么样的整数，$2k^2$ 都是偶数. 因为 $q^2=2k^2$，所以 q^2 是偶数. 而只有当 q 是偶数时，q 的平方才能是偶数（见例 8）. 这就证明了 p 和 q 都是偶数，从而推出了希望得到的矛盾.

例 9 的证明 与结论相反，假设 r 是一个形如 $\frac{p}{q}$ 的有理数（这里 p 和 q 是整数并且 $q\neq0$），而且 $r^2=2$. 此外还可假设 p 和 q 除 ±1 外没有公因子，否则可从分子 p 和分母 q 中约去. 因为 $r^2=2$ 并且 $r=\frac{p}{q}$，所以 $2=\frac{p^2}{q^2}$，即有 $2q^2=p^2$. 因为 $2q^2$ 是偶数，所以 p^2 也是偶数，从而 p 也必须是偶数. 由此存在整数 k，使得 $p=2k$. 用这个值代替 p，便得到 $2q^2=p^2=(2k)^2=4k^2$，即有 $q^2=2k^2$. 由 q^2 是偶数，从而 q 也是偶数. 这

就证明了 p 和 q 都是偶数，有公因子 2. 这个矛盾证明了结论是真的. //

这个证明是古代毕达哥拉斯的追随者所发现的，并且是使用矛盾法的典型. 你试试能不能用其他方法来证明这个命题.

矛盾法还有其它有价值的用处. 当命题 B 中出现量词"存在"时，不管实际上有多大困难，用构造法都要构造出所希望的事物. 矛盾法却开拓出了一条解决问题的新途径，代替证明存在一个具有给定性质的事物使所说的事情发生，为什么不从不存在这个事物的假设出发来进行呢？要这样作就是想法用这些信息去寻找某种矛盾. 这种作法虽然对于在哪里会出现和出现什么样的矛盾不很清楚，但是它却比找到或构造一个所需要的事物容易得多. 看下面的例子.

设想要证明世界上至少有两个人的头发数是相同的. 如果用构造法，就得找出这样的两个人. 为了节省时间和减少麻烦可以使用矛盾法. 假设不存在头发数相同的人，那么所有人的头发数都不相同. 现在对人编号，将头发数最少的编为 1 号，将头发数次少的编为 2 号，如此等等. 因为已假设所有人的头发数都不同，所以编号为 2 的人的头发数比编号为 1 的人的头发数至少多 1. 由此编号为十亿的人的头发数比编号为 1 的人的头发数至少多十亿！很清楚，不可能有一个人会比另一个人的头发多十亿根，从而推出了矛盾.

关于用构造法与用矛盾法，这个例子说明了它们之间的一个浅显但很有意义的区别. 如果构造法成功了，那么就会找到想要找的事物，或者至少可以指出怎样能找到它，这也许要在计算机的帮助下. 相反，如果用矛盾法得到了同样的结果，那么虽然知道所说的事物是存在的，但实际上却没有办法构造出来. 正是由于这个缘故，用矛盾法来证明比起用构造

法来证明通常要简短并且也容易得多，因为用不着构造出所希望的事物，而只需证明它不存在是不可能的. 这个区别已在数学中引起了某种带根本性的争论，不仅如此，当前有一个很活跃的研究领域，就是想在过去只能用矛盾法得出证明的场合下寻找出构造法的证明.

当命题 B 中出现否定词，并且它正好是某个熟悉命题的否定时，矛盾法是一个非常有用的方法. 运用这个方法时从假设 A 和非 B 都是真的开始作顺推，推出一个矛盾. 这种方法的缺点之一是不能准确地知道矛盾是什么. 下一章将介绍另一种证明方法，这个方法是试图找到一个十分特殊的矛盾. 这样，就会有一个"指路灯"，指明所要找的究竟是什么矛盾.

习　　题

注：所有的证明都必须有证明概要和简练证明.

8.1　应用矛盾法证明下列命题时，你应假设什么？

(a) 如果 l, m 和 n 是三个相邻的整数，那么 24 不能整除 $l^2+m^2+n^2=1$.

(b) 如果矩阵 M 是非奇异的，那么 M 的行向量组线性无关.

(c) 如果 f 和 g 是两个函数并且(1) $g\geqslant f$，(2) f 没有上界. 那么 g 也没有上界.

8.2　改写下列每个命题使否定词出现，即使它是某个命题的否定.

(a) 素数的个数是无限的.

(b) 某些实数组成的集合 S 是无界的.

(c) 整除正整数 p 的正整数，只有 1 和 p.

(d) 直线 l 和 l' 是平行的.

(e) 实数 $x<5$.

8.3 用矛盾法证明,如果 n 是整数并且 n^2 是偶数,那么 n 是偶数.

8.4 用矛盾法证明,不存在弦长大于直径长的圆.

8.5 用矛盾法证明,如果 l_1 和 l_2 是平面内的两条直线,并且与同一平面内的第三条直线 l 垂直,那么 l_1 与 l_2 平行.

8.6 用矛盾法证明,在 n 个人($n\geqslant 2$)的团体中,至少有两个人在这个团体中的朋友数是相同的.

8.7 用矛盾法证明,不存在三个相邻的正整数,使其最大者的立方等于其余二个的立方和.

8.8 用矛盾法证明,素数有无穷多个(提示:设 n 是最大的素数,考虑任何一个能整除 $n!+1$ 的素数 p,以及 p 与 n 有怎样的关系?).

8.9 对下面每个命题,指出应该使用什么证明方法并且按怎样的顺序来使用这些方法,特别需要讲明你要假设什么和试图得到什么结论(注:在每个命题中都假设 S 和 T 是某些实数组成的集合,并且所有的变量都是实变量).

(a) $\exists s\in S \ni s\in T$.

(b) $\forall s\in S \nexists t\in T$,使得 $s>t$.

(c) $\nexists M>0$,使得 $\forall x\in S$, $|x|<M$.

9. 换质位法

上一章讲述了矛盾法，这个方法是从 A 和非 B 这两个命题开始作顺推来推出某种矛盾．一般说来，这种方法的困难在于不知道将出现什么样的矛盾．这一章讲述换质位法，它的优点是让你推出一个特殊类型的矛盾．

与矛盾法类似，换质位法也是从假设 A 和非 B 是真的开始的．但与矛盾法不同的是，不是从 A 和非 B 两者开始顺推，而是仅仅从非 B 开始进行顺推．目的是得到 A 是假的(今后写为非 A)这一矛盾．没有比这更好的矛盾了，因为不可能使 A 既是真的同时又是假的．

重复地说，使用换质位法时，假设 A 和非 B 是真的，从命题非 B 开始进行顺推，来得到 A 是假的这个矛盾．这样，对换质位法来说，必须推出与假设 A 是真的相矛盾．在这个意义上，换质位法可以认为是矛盾法的一种更"被动"的形式．然而在通常的矛盾法中，假设 A 是真的是可以主动、灵活地用来推出任何矛盾的(参看表 5)．

表 5　换质位法与矛盾法的比较

方法	假设	结论
换质位法	A	
	非 B --顺推-->	<--倒推-- 非 A
矛盾法	A, 非 B --顺推-->	*(矛盾)

从表 5 也可以看到换质位法与矛盾法的优点和缺点．换质位法的缺点是仅从一个命题(也就是非 B)而不是从两个命

题开始进行顺推.它的优点是确切地知道要寻找的是什么(也就是非 A). 正因为这样,常常能够运用以命题非 A 为目标作倒推的抽象过程. 而在矛盾法中,因为不知道要寻找的是什么样的矛盾,所以找不到作倒推的适当目标.

用下面的例子说明怎样运用换质位法.

例 10 如果 p 和 q 是正实数,并且 $\sqrt{pq}\neq\frac{p+q}{2}$,那么 $p\neq q$.

证明概要 结论 B 是熟悉命题($p=q$)的否定,提示我们不是使用矛盾法就是使用换质位法. 现在使用换质位法. 可以从命题非 B 着手进行顺推,并且也可以从命题非 A 进行倒推. 命题非 A 是:"$\sqrt{pq}=\frac{p+q}{2}$",非 B 是"$p=q$". 我们的目的是从 $p=q$ 着手进行顺推,以得到结论 $\sqrt{pq}=\frac{p+q}{2}$.

既然要得到 $\sqrt{pq}=\frac{p+q}{2}$ 的结论,又假设了 $p=q$,为什么不把 q 都换成 p 呢?换句话说,由 $p=q$, $\sqrt{pq}=\sqrt{pp}=p$,也就有 $\frac{p+q}{2}=\frac{p+p}{2}=p$. 这样,从假设 $p=q$ 进行顺推,就容易得出 $\sqrt{pq}=\frac{p+q}{2}=p$. 注意,在断定 $\sqrt{pp}=p$ 时已经用到了 $p>0$ 的假设.

应该注意,在下面的简练证明中,并没有在形式上指出已经推出了命题非 A.

例 10 的证明 假设结论不成立,即 $p=q$. 因为 p 是正的,所以有

$$\sqrt{pq}=\sqrt{pp}=p=\frac{p+p}{2}=\frac{p+q}{2}.$$

证明完成. //

比较一下换质位法和顺推-倒推法也是很有趣的. 顺推-

倒推法是从 A 着手作顺推,从 B 着手作倒推的. 而换质位法是从非 B 着手作顺推,从非 A 着手作倒推的(见表 6).

表 6 顺推-倒推法与换质位法的比较

方法	假设	结论
顺推-倒推法	A }——顺推——→	←——倒推——B
换质位法	A 非 B}——顺推——→	←——倒推——非 A

如果看懂了表 6, 那么就会不费劲地看出为什么换质位法可能比顺推-倒推法更好. 从非 B 着手作顺推比从 A 着手作顺推也许能得到更有用的信息. 再者,在进行顺推-倒推时关于命题非 A 完成抽象过程也可能比关于 B 完成抽象过程要容易些.

顺推-倒推法是由以下考虑而产生的,这就是考虑在 A 是真的或假的的各种情形中,哪一种情形"A 推出 B"是真的(见表 1). 换质位法是由关于 B 的类似考虑而产生的. 如果 B 是真的, 那么根据表 1, 命题"A 推出 B"一定是真的, 这就没有必要去考虑 B 是真的这种情形. 所以设想 B 是假的,而为了证实"A 推出 B"是真的, 根据表 1 必须证明 A 是假的. 因此,对于换质位法来说,是假设 B 是假的, 并且试图断定 A是假的.

其实, 命题"A 推出 B"在逻辑上等价于"非 B 推出非 A"(见表 3). 就这一点而论, 换质位法可以认为是应用到命题"非 B 推出非 A"上的顺推-倒推法. 在多数用换质位法的简练证明中是很少或不提到矛盾法的.

一般来说, 对于一个给定题目, 如果不是逐个进行试验, 就很难知道顺推-倒推法、矛盾法或者换质位法三者中那种方法更为有效. 但是有一种情况经常表明应挑选或至少应着重

考虑矛盾法或换质位法. 这就是当命题 B 中出现否定词,即它恰好是某个熟悉命题(熟悉概念)的否定这种情况,因为在这种情况下经常会从命题非 B(也就是熟悉命题或熟悉概念)中发现一些有用的信息.

矛盾法是从 A 和非 B 这两个命题着手作顺推以推出一个矛盾. 而换质位法也要推出一个矛盾,但却是通过从非 B 着手作顺推而推出非 A 的结论. 当然也可以从非 A 着手作倒推. 在表 7 中给出了顺推-倒推法、矛盾法和换质位法的比较.

表 7 顺推-倒推法、矛盾法、换质位法的比较

方法	假设	结论
顺推-倒推法	A } --顺推-->	<--倒推-- B
矛盾法	A, 非 B } --顺推-->	*(矛盾)
换质位法	A 非 B } --顺推-->	<--倒推-- 非 A

换质位法和矛盾法两者都要求能写出一个命题的否定. 下一章将介绍当命题中出现量词时,如何做到这一点.

习　　题

注:所有的证明都必须有证明概要和简练的证明.

9.1 如果用换质位法证明下列命题,将用什么命题着手作顺推?应该推出什么命题?

(a) 如果 n 是整数,并且 n^2 是偶数,那么 n 是偶数.

(b) 假设 S 是某些实数组成的集合 T 的子集合,如果 S 无界,那么 T 也无界.

(c) 如果 x 和 y 是实数,并且 $x\neq y$,那么 $f(x)\neq f(y)$(此

处 f 是单变量函数).

(d) 如果矩阵 M 是非奇异的，那么 M 的行向量是线性无关的.

9.2 给出如下命题:"如果 r 是实数,并且 $r>1$,那么不存在位于 0 与 $\frac{\pi}{4}$ 之间的实数 t，使得 $\sin t=r\cos t$". 用换质位法证明这个命题时,下列哪些命题是顺推过程的结果?

(a) $r-1\leqslant 0$.

(b) $\sin^2 t=r^2(1-\sin^2 t)$.

(c) $1-r<0$.

(d) $\operatorname{tg} t=\frac{1}{r}$.

9.3 在用换质位法证明以下命题时:"如果函数 f 在点 x 的导数不等于 0，那么 x 不是 f 的一个局部极小值点"，下列哪些是正确的抽象问题?哪些是错误的抽象问题?

(a) 怎样才能证明点 x 是函数 f 的局部极小值点?

(b) 怎样才能证明函数 f 在点 x 处的导数是零?

(c) 怎样才能证明一个点是一个函数的局部极小值点?

(d) 怎样才能证明一个函数在一点的导数为零?

9.4 求证:如果 c 是奇数，那么方程 $n^2+n-c=0$ 对 n 没有奇数解.

9.5 假设 m 和 b 是实数,并且 $m\neq 0$, 设 f 是由 $f(x)=mx+b$ 定义的函数. 试证:对所有的 $x\neq y$, 有 $f(x)\neq f(y)$.

9.6 用换质位法证明: 如果四边形 $RSTU$ 的角都不是钝角,那么四边形 $RSTU$ 是矩形.

10. 怎样否定一个有量词的命题

在上一章已经看到换质位法是一种有价值的证明方法. 然而要使用它，需要有能力写出命题非 B，以便进行顺推. 同时必须知道命题非 A 究竟是什么才能对它使用抽象过程. 在某些情况下，一个命题的否定是很容易找到的. 例如，如果 A 是命题"实数 $x>0$"，那么 A 的否定是"不是实数 $x>0$"，或者"实数 x 不大于 0". 将否定词与它所要否定的事实变成一个与之等价的新命题："实数 $x\leqslant 0$"，就可以把否定词除去.

当命题中出现量词时，比较困难的情况就发生了. 例如命题 B 中出现量词"对所有的"，它的标准形式是：

对所有具有"某种性质"的"事物"，使得(有)"某件事情发生".

那么非 B 是命题：

不是对所有具有"某种性质"的"事物"，使得(有)"某件事情发生".

它的真正含义是：存在一个具有某种性质的事物，而对于它，这件事情不发生. 同样，如果命题 B 中出现量词"存在"，标准形式是：

存在一个具有"某种性质的事物"，使得"某件事情发生".

那么非 B 是命题：

不是存在一个有"某种性质"的"事物"，使得"某件事情发生".

或者换句话说：对所有具有某种性质的事物，这件事情不发生.

一般对于出现一个或多个量词的命题，要找出它的否定时，可采用以下步骤.

第一步 把词"不是"放在整个命题的前面.

第二步 将词"不是"从量词的左侧移到量词的右侧，使它恰好位于使得(或有)之后和某件事情发生之前，并且把量词变成与之意义相反的量词，即"对所有的"变成"存在"，"存在"变成"对所有的".

第三步 当全部的量词出现在"不是"的左侧时，将否定词与它所要否定的事实变成一个与之等价的新命题.

用下面的例子来说明这些步骤.

例 1 对每一个实数 $x\geqslant2$，有 $x^2+x-6\geqslant0$.

第一步 不是对每一个实数 $x\geqslant0$，有 $x^2+x-6\geqslant0$.

第二步 存在一个实数 $x\geqslant2$，使得

不是 $x^2+x-6\geqslant0$.

第三步 存在一个实数 $x\geqslant2$，使得

$x^2+x-6<0$.

在第二步中，当"不是"从左侧移到右侧时，量词是变了，但所具有的某种性质(即 $x\geqslant2$)并没有变. 又因为量词"对每一个"变成了"存在"，所以当原来是用"使得"时现在不变，当原来是用"有"时现在改为"使得"，当原来"使得"和"有"都没有用时，就必须在逗号之后添上一个词"使得". 完全类似，如果量词"存在"变成"对所有的"，那么原来的"使得"或者不变或者改为"有"或者取消. 看下面例子.

例 2 存在一个实数 $x\geqslant2$，使得 $x^2+x-6\geqslant0$.

第一步 不存在一个实数 $x\geqslant2$，使得

$x^2+x-6\geqslant0$.

第二步 对所有 $x\geqslant2$ 的实数，使得不是

$x^2+x-6\geqslant0$

第三步 对所有 $x \geqslant 2$ 的实数，有 $x^2+x-6<0$.

如果原来的命题中出现多于一个的量词，那么第二步需要重复进行，直到所有的量词都出现在"不是"的左侧．用下面两个例子来说明．

例 3 对每个在 -1 与 1 之间的实数 x，存在一个 -1 与 1 之间的实数 y，使得 $x^2+y^2 \leqslant 1$.

第一步 不是对每一个在 -1 与 1 之间的实数 x，存在一个 -1 与 1 之间的 y，使得

$$x^2+y^2 \leqslant 1.$$

第二步 存在一个 -1 与 1 之间的实数 x，使得不存在 -1 与 1 之间的一个 y，使得 $x^2+y^2 \leqslant 1$.

第二步* 存在一个 -1 与 1 之间的实数 x，使得对所有的在 -1 与 1 之间的实数 y，使得不是 $x^2+y^2 \leqslant 1$.

第三步 存在一个 -1 与 1 之间的实数 x，使得对所有的 -1 与 1 之间的实数 y，有 $x^2+y^2>1$.

例 4 存在一个 -1 与 1 之间的实数 x，使得对所有在 -1 与 1 之间的实数 y，有 $x^2+y^2 \leqslant 1$.

第一步 不存在一个 -1 与 1 之间的实数 x，使得对所有在 -1 与 1 之间的实数 y，有 $x^2+y^2 \leqslant 1$.

第二步 对所有在 -1 与 1 之间的实数 x，使得不是对所有的在 -1 与 1 之间的实数 y，有 $x^2+y^2 \leqslant 1$.

第二步* 对所有在 -1 与 1 之间的实数 x，存在一个 -1 与 1 之间的实数 y，使得不是 $x^2+y^2 \leqslant 1$.

第三步 对所有在 -1 与 1 之间的实数 x，存在一个 -1 与 1 之间的实数 y，使得

$$x^2+y^2>1.$$

在这里必须注意的另一种情况是怎样否定有联接词"并且"或"或者"的命题．当否定这样的命题时，像两个量词互相

交换一样，“并且”与“或者”也互相交换. 明确地说，[A并且B]的否定是：[A的否定]或者[B的否定]，即非[A并且B]是：[非A]或者[非B]. 同样，[A或者B]的否定是：[A的否定]并且[B的否定]，即非[A或者B]是[非A]并且[非B]. 例如：

例 5 非[$x\geqslant 3$并且$y<2$]是：[$x<3$]或者[$y\geqslant 2$].

例 6 非[$x\geqslant 3$或者$y<2$]是：[$x<3$]并且[$y\geqslant 2$].

要使用换质位法时，必须首先写出命题非B和非A.

习　题

注：所有证明都必须有证明概要和简练的证明.

10.1 对习题5.1中的每一个定义，写出它的否定.

例如，5.1(a)写为“设$f(x)$是函数，x^*是实数”. 如果存在一个实数x，使得$f(x)>f(x^*)$，那么实数x^*不是函数f的最大值点.

10.2 改写下面的命题，使否定词在命题中出现. 例如：命题“$x>0$”，可以改写为“$x\nleqslant 0$”.

(a) 对S中的每一个元素x，x也在T中.

(b) 存在一个在0与$\frac{\pi}{2}$之间的角t. 使得

$$\sin t=\cos t.$$

(c) 对每一个有“某种性质”的“事物”“某件事情发生”.

(d) 存在一个有“某种性质”的“事物”，使得“某件事情发生”.

10.3 用矛盾法证明下列命题时，假设是什么？

(a) 对于每一个整数$n\geqslant 4$，$n!>n^2$.

(b) A推出(B或C).

(c) A 推出(B 和 C).

(d) 如果 f 是一个单变量的凸函数，x^* 是一个实数，存在一个实数 $\delta>0$，使得对所有具有性质 $|x-x^*|<\delta$ 的实数 x，有 $f(x)\geqslant f(x^*)$，那么对所有实数 y，有 $f(y)\geqslant f(x^*)$.

10.4 如果用换质位法证明下列每一个命题，那么将从什么命题出发进行顺推，又从什么命题出发进行倒推?

(a) A 推出(B 或者 C).

(b) A 推出(B 并且 C).

(c) 如果 n 是偶数并且 m 是奇数，那么或者 mn 被 4 整除或者 n 不被 4 整除.

10.5 用矛盾法证明，如果 x 和 y 是实数，并且 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x+y=0$，那么 $x=0$，$y=0$.

11. 特殊的证明方法

现在已经有了用来证明"A 推出 B"的三种主要的证明方法，即：顺推-倒推法、换质位法和矛盾法．当 B 中出现量词时，还可以用选择法和构造法．此外 B 还可能有其他几种特殊形式，对这些形式也有常用的和有效的证明方法．这一章就来讲述其中三个这样的证明方法．

首先介绍的是叫做唯一性的方法，它用于命题 B 的这种形式，就是不仅要求证明存在一个具有某种性质的事物使某件事情发生，而且也要求证明这个事物是唯一的（即只有一个这样的事物）．当命题 B 中量词"存在"的后面同时也出现"唯一"这个词时，应该使用唯一性方法．

在这种情况下，首先是证明所希望的事物确实存在，这可以用构造法或矛盾法．下一步将是用下述的两种标准方法之一去证明唯一性．第一种是假设有两个事物具有这种性质并使得这件事情发生．如果要断定只有一个这样的事物，就必须利用所说的性质和所发生的事情或许还有 A 中的信息，去断定这两个事物就是同一个（即它们确实相等）．为了证明他们相等，顺推-倒推法通常是最好的方法．用下面例子说明这种方法．

例 11　如果 a, b, c, d, e 和 f 是实数，并且 $ad-bc\neq 0$，那么存在唯一的一对实数 x 和 y，使得 $ax-by=e$ 和 $cx+dy=f$.

证明概要　在例 4 中通过构造法确定了实数 x 和 y 的存在．现在用上面所说的方法来断定唯一性．假设(x_1, y_1)和

(x_2, y_2)是两个具有这种性质而且使这件事情发生的事物.因而得到 $ax_1+by_1=e$ 和 $cx_1+dy_1=f$，也得到 $ax_2+by_2=e$ 和 $cx_2+dy_2=f$. 用这四个方程和 A 是真的的假设，通过顺推-倒推法来证明这两个事物(x_1, y_1)和(x_2, y_2)相等. 具体地说，提出的抽象问题是："怎样才能证明两个实数对[即(x_1, y_1)和(x_2, y_2)]相等？"应用序对相等的定义(见定义 4)，回答是证明 $x_1=x_2$ 和 $y_1=y_2$，或者证明 $x_1-x_2=0$ 和 $y_1-y_2=0$. 这两个命题可通过对四个方程进行恒等变形以及利用 $ad-bc\neq 0$, 由顺推过程而得到.

例 11 的证明 在例 4 中用构造法确定了实数 x 和 y 的存在，现在只需给出唯一性的证明. 为此目的，假设(x_1, y_1)和(x_2, y_2)是实数对，满足

(1) $ax_1+by_1=e$.

(2) $cx_1+dy_1=f$.

(3) $ax_2+by_2=e$.

(4) $cx_2+dy_2=f$.

从(1)式减去(3)式，从(2)式减去(4)式，得出

$$a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0$$

$$c(x_1-x_2)+d(y_1-y_2)=0$$

用 d 乘以第一个方程的两边，用 b 乘以第二个方程的两边，然后从第一个方程减去第二个方程，得到$(ad-bc)(x_1-x_2)=0$. 由题设 $ad-bc\neq 0$，得到 $x_1-x_2=0$，从而 $x_1=x_2$. 经过类似的恒等变形，可得 $y_1=y_2$. 这样就证明了唯一性. //

证明唯一性的第二种方法是假设有两个不同事物，具有这种性质并使这件事情发生. 现在希望这是不可能的，应该应用所说的性质，所发生的事情以及 A 中的信息，特别这是两个不同事物的事实，来推出一个矛盾. 用下面的例子来说明这个方法.

例 12 如果 r 是一个正实数，那么存在唯一的实数 x，使得 $x^3=r$.

证明概要 在结论中量词"存在"的出现，提示我们运用构造法去求得一个实数 x，使 $x^3=r$. 证明的这一部分省略了，以使唯一性的证明写得详细一些. 假设 x 和 y 是两个不同实数，使得 $x^3=r$，$y^3=r$，利用 r 是正的的假设，特别是 $x\neq y$ 的事实，证明 $r=0$，这就推出与 r 是正的的假设相矛盾.

为了证明 $r=0$，作顺推. 因为 $x^3=r$ 和 $y^3=r$，所以得出 $x^3=y^3$，$x^3-y^3=0$，分解因式得到

$$[(x-y)(x^2+xy+y^2)]=0$$

这里可根据 $x\neq y$ 的事实，用 $x-y$ 去除上式，得到 $x^2+xy+y^2=0$. 将它看作是形如 $ax^2+bx+c=0$ 的二次方程，其中 $a=1$，$b=y$ 和 $c=y^2$. 由二次方程求根公式得到

$$x=\frac{-y\pm\sqrt{(y^2-4y^2)}}{2}=\frac{-y\pm\sqrt{-3y^2}}{2}$$

因为 x 是实数，上面关于 x 的公式需要取 $-3y^2$ 的平方根，所以必定有 $y=0$. 而当 $y=0$ 时，$r=y^3=0$. 这样就得到了矛盾.

例 12 的证明 只给出唯一性的证明. 为此目的，假设 x 和 y 是两个不同的实数，并且满足 $x^3=r$ 和 $y^3=r$，由此 $0=x^3-y^3=(x^2+xy+y^2)(x-y)$. 因为 $x\neq y$，所以 $x^2+xy+y^2=0$. 根据二次方程求根公式，得到

$$x=\frac{-y\pm\sqrt{(y^2-4y^2)}}{2}=\frac{-y\pm\sqrt{-3y^2}}{2}$$

因为 x 是实数，所以必定有 $y=0$. 于是有 $r=y^3=0$. 这与题设 r 是正数相矛盾. //

另一个特殊证明方法，叫做互斥法，用在 B 有以下形式的时候："或者 C 是真的，或者 D 是真的"(此处 C 和 D 都是

命题). 换句话说，当要证明命题"A 推出 C 或者 D"是真的时，使用互斥法. 用顺推-倒推法来证明这样的命题，要从假设 A 是真的开始，得到或者 C 是真的，或者 D 是真的的结论. 设若作了 C 不是真的这一附加假设，则很清楚，在这种情况下，就变成要证明 D 是真的. 这样，所谓互斥法就是假设 A 是真的，C 是假的，然后推出 D 是真的. 看下面的例子.

例 13 如果 $x^2-5x+6\geqslant 0$. 那么 $x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 3$.

证明概要 用互斥法假设 $x^2-5x+6\geqslant 0$, $x>2$. 目的是断定 $x\geqslant 3$. 从 $x^2-5x+6\geqslant 0$ 的假设开始顺推，得到 $(x-2)\cdot(x-3)\geqslant 0$. 因为 $x>2$, $x-2>0$, 所以 $x-3\geqslant 0$. 这就是要求的 $x\geqslant 3$.

例 13 的证明 假设 $x^2-5x+6\geqslant 0$, $x>2$, 由此可得$(x-2)(x-3)\geqslant 0$. 因为 $x-2>0$, 所以得到所要求的 $x\geqslant 3$. //

当然用互斥法时可以假设 A 是真的和 D 是假的，然后推出 C 是真的. 试将这种做法用在例 13 上.

本章要介绍的最后一个证明方法是极大-极小法，它是用来处理极大和极小问题的. 假设 S 是由某些实数组成的非空集合，S 有一个最大数和一个最小数. 对于一个给定的实数 x, 我们感兴趣的是集合 S 中的数和 x 的位置关系.
可能要证明下面这些命题中的一个.

(1) S 中的所有数都在 x 的右边(见图 12(a)).

(2) S 中的有一些数在 x 的左边(见图 12(b)).

(3) S 中的所有数都在 x 的左边(见图 12(c)).

(4) S 中的有一些数在 x 的右边(见图 12(d)).

使用数学符号，这四个命题可分别写为：

(a) $\min\{s: s\in S\}\geqslant x$.

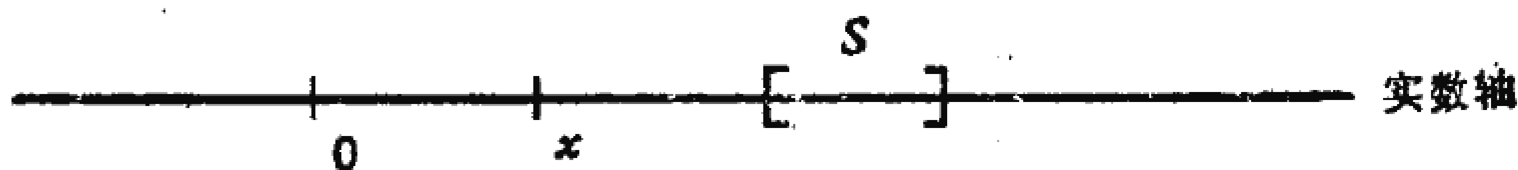
(b) $\min\{s: s\in S\}\leqslant x$.

(c) $\max\{s: s\in S\}\leqslant x$.

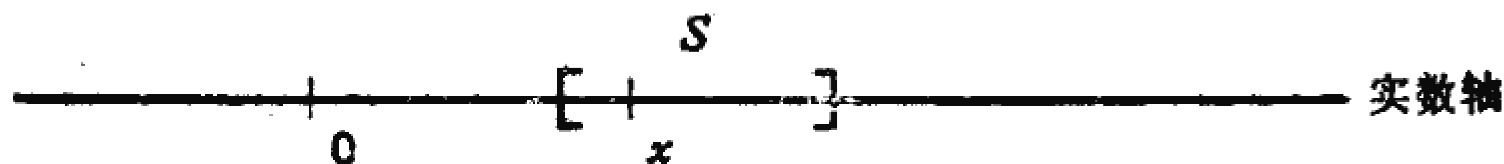
(d) $\max\{s: s\in S\}\geqslant x$.

这里讨论第一个和第二个的证法，其余两个留作练习．极大-极小法的想法是把给出的命题转化为一个含有量词的等价命题，然后适当使用选择法或构造法．

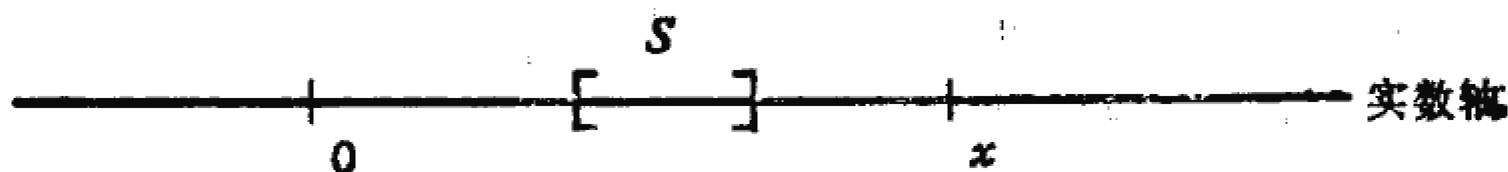
考虑 S 中的最小数 $\geqslant x$ 的问题．用上面相应的命题(1)可以得到一个有量词的等价命题．因为 S 中的“所有数”应该在 x 的右边，所以需要证明对于 S 中的所有元素 s，有 $x\leqslant s$．看下面的例子．



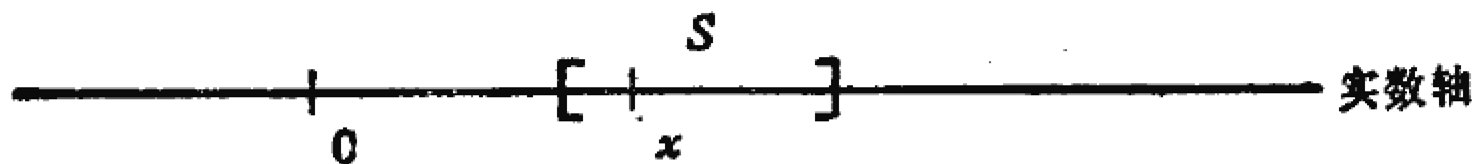
(a) S 中的所有数在 x 的右边



(b) S 中的一些数在 x 的左边



(c) S 中的所有数在 x 的左边



(d) S 中的一些数在 x 的右边

图 8

例 14 如果 R 是所有实数组成的集合，那么 $\min\{x(x-1): x\in R\}\geqslant -\frac{1}{4}$.

证明概要 根据命题 B 的形式，用极大-极小法，B 能够

转化为："对所有实数 x，有 $x(x-1)\geqslant-\frac{1}{4}$"．一旦变成这种形式，显然就可以使用选择法了．选择一个实数 x，证明 $x(x-1)\geqslant-\frac{1}{4}$，或者 $\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)\geqslant 0$．但是，因为 $\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$，所以这个数总是 $\geqslant 0$，证明完成．

例 14 的证明　为了得到 $\min\{x(x-1):\ x\in R\}\geqslant-\frac{1}{4}$ 的结论，设 x 是任一实数．因为 $\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$，所以 $x^2-x+\frac{1}{4}\geqslant 0$，从而 $x(x-1)\geqslant-\frac{1}{4}$．//

现在证明 S 的最小数 $\leqslant x$，证明方法稍有不同．考虑相应的命题(2)．因为 S 中的"一些"实数应该在 x 的左边，等价的问题是证明在 S 中存在元素 s，使得 $s\leqslant x$，然后可以使用构造法和矛盾法．

这一章讲述了三种特殊方法，它们分别适用于 B 的三种特殊形式．本书的最后一章将给出完整的总结．

习　　题

注：所有的证明都必须有证明概要和简练的证明．

11.1　求证：如果 x 是实数，并且 $x>2$，那么存在唯一的实数 $y<0$，使得 $x=\frac{2y}{1+y}$．

11.2　应用第二种唯一性方法证明，如果 m 和 b 都是实数，并且 $m\neq 0$，那么存在唯一的数 x，使得 $mx+b=0$．

11.3　求证：如果 a 和 b 是实数，至少有一个不为 0，$i=\sqrt{-1}$，那么存在唯一的复数，不妨设为 $c+di$，使得 $(a+bi)\cdot(c+di)=1$．

11.4 用矛盾法代替互斥法证明"A 推出(B 或者 C)"的优点和缺点是什么?

11.5 求证: 如果 n 是偶数, m 是奇数, 那么或者 4 整除 mn 或者 4 不整除 n.

11.6 考虑命题"如果 x 是一个实数, 并且满足 $x^3+3x^2-9x-27\geqslant 0$, 那么 $|x|\geqslant 3$".

(a) 将这个命题改写成"A 推出 B 或者 C"的形式.

(b) 通过假设 A 和非 B 是真的来证明这个命题.

(c) 通过假设 A 和非 C 是真的来证明这个命题.

11.7 将下面的极大、极小问题转化为含有量词的命题(注: S 是某些实数所组成的集合, x 是一个给定的实数).

(a) $\max\{s: s\in S\}\leqslant x$.

(b) $\max\{s: s\in S\}\geqslant x$.

下面设 a, b, c 和 d 是给定的实数, x 是变量.

(c) $\min\{cx: ax\leqslant b,\ x\geqslant 0\}\leqslant u$.

(d) $\max\{cx: ax\geqslant b,\ x\geqslant 0\}\geqslant u$.

(e) $\min\{ax: b\leqslant x\leqslant c\}\geqslant u$.

(f) $\max\{bx: a\leqslant x\leqslant c\}\leqslant u$.

11.8 求证: 如果 S 是某些实数所组成的集合 T 的非空子集合, t^* 是一个实数, 并且满足性质: 对 T 中每一个元素 t, $t\geqslant t^*$, 那么 $\min\{s: s\in S\}\geqslant t^*$.

11.9 假定 a, b 和 c 是给定的实数, x 和 u 是变量, 求证 $\min\{cx: ax\geqslant b,\ x\geqslant 0\}$ 大于或等于 $\max\{ub: ua\leqslant c,\ u\geqslant 0\}$.

12. 总　结

我们所要讲的证明方法已经全部讲完了．但这决不是说只有这里所讲的这些方法，而是说它们是基本的方法．当然，当你接触更广泛的数学内容时，你会偶然发现其它的方法，也许还会发展出自己的一些方法．不管怎样，所讲的这些方法与经验相结合，将会使你得到许多很好的想法和技巧．为了证明命题“A 推出 B”，如何使用和在什么情况下使用这些不同方法，将按顺序列在总结中．

使用顺推-倒推法时，可以假定 A 是真的，目的是证明 B 是真的．通过顺推过程，从 A 推出命题序列 A_1，A_2，⋯．因为 A 是真的，所以 A_1，A_2，⋯⋯也必定是真的．这个序列不是无目的地作出的，而是在倒推过程的引导下作出的．通过提出和回答抽象问题，从 B 引出命题 B_1．它具有性质：如果它是真的，那么 B 也是真的．然后将抽象过程应用到 B_1，又得到一个新命题 B_2，如此等等．其目的是通过顺推序列产生一个命题恰好与倒推序列得到的最后命题一样，以使顺推序列与倒推序列连接起来．就像骨牌的纵列那样，从 A 沿着序列作顺推，经过所有命题而到达 B，便完成这个证明．当序列中的命题有量词出现时，通常可以用构造法、选择法、归纳法以及特殊化法来做出证明．

例如，当量词“存在”以下面的标准形式在倒推过程中出现时：

存在一个具有“某种性质”的“事物”，使得“某件事情发生”，

应该考虑用构造法去实际产生所希望的事物．用构造法时，由假设 A 是真的着手作顺推，构造出(构造或设计一个算法去产生所希望的事物等等)这个事物，一定要检验它满足所说的性质，并且使得所说的事情发生．

另一方面，当量词"对所有的"以下列标准形式出现在倒推过程中时：

对于所有具有"某种性质"的"事物"，使得(有)"某件事情发生"．

应该考虑用选择法．目的是设计一个证明机器，使之有能力取出具有这种性质的任何事物和验证这件事情发生．这就是选出一个确实具有所说性质的事物．然后断定，对于这个事物这件事情发生．一旦已经选择出了这个事物，最好这样做：从选择出的事物确实具有所说的性质这一事实(如果必要，连同在 A 中的信息)出发作顺推，并且从将发生的事情出发进行倒推．

当命题 B 有以下形式时，应该(甚至在选择法之前)考虑用归纳法．

对大于或等于整数 k 的每一个整数 n，命题 $P(n)$ 是真的．

归纳法的第一步是对 n 的第一个值 k 验证命题是真的；第二步要求证明：如果 $P(n)$ 是真的，那么 $P(n+1)$ 也是真的．前面说过，有没有能力将命题 $P(n+1)$ 与 $P(n)$ 联系起来，因而能够利用 $P(n)$ 是真的的归纳假设，决定了归纳法证明能不能取得成功．换句话说，为了完成归纳法证明的第二步，应该将命题 $P(n)$ 中每一处的 n 都用 $n+1$ 来代替而写出命题 $P(n+1)$．接着看看是否能用 $P(n)$ 来表示 $P(n+1)$．只有这个时候，才能应用 $P(n)$ 是真的这一假设去达到所希望的结论：$P(n+1)$ 也是真的．

最后，当量词"对所有的"以下列标准形式出现在顺推过程时：

对所有具有"某种性质"的"事物"，使得(有)"某件事情发生".

也许要使用特殊化法．要这样做，就需要找出在倒推过程中出现的这些事物中的一个．接着通过使用特殊化法，断定对所考虑的特殊事物，这件事情确实发生．然后借助于这个事实以达到 B 是真的的结论．当采用特殊化法时，一定要验证这个特殊事物确实满足所说的性质，因为只有这时，这件事情才会发生．

当最初的命题 B 包含否定词即是某个熟悉命题的否定时，或者当顺推-倒推法失败时，应该考虑用换质位法或矛盾法，并且首先选择前者．使用换质位法解决问题时，必须直接写出命题非 B 和命题非 A．如果必要可使用第 10 章的方法．由假设非 B 是真的出发，目的是断定非 A 是真的．在这里最好是使用顺推-倒推法，从命题非 B 着手进行顺推，从命题非 A 着手进行倒推．还要注意在顺推或倒推过程中是不是出现了量词．因为如果它们出现了，那么相应地用构造法、选择法、归纳法和特殊化法．

当换质位法失败时，用矛盾法仍然存在着希望．用矛盾法不但允许假设 A 是真的，而且可以假设 B 是假的．这就给出了两个事实，从它们出发推出与某个已知为真的事实相矛盾．在这里矛盾出现在什么地方经常是不明显的，但是用命题 A 和非 B 作顺推，这个矛盾总能找到．

在试着证明"A 推出 B"时，要尽可能地观察 B 的形式，特别要仔细阅读命题 B 中的某些关键词，因为它们经常指出应该怎样进行．例如，如果发现量词"存在"，那么就考虑用构造法．而发现量词"对所有的"时，应该采用选择法或归纳法．

表 8 证明方法总结

证明方法	什么时候用它	假设是什么	结论是什么	怎样做
顺推-倒推法	作为第一个试用的方法，或当 B 没有特别的形式时.	A	B	从 A 着手作顺推，并且运用抽象过程以达到 B.
换质位法	当 B 中出现否定词时.	非 B	非 A	从非 B 着手作顺推，并且从非 A 着手作倒推.
矛盾法	当 B 中出现否定词时，或当第一、二种方法失败时.	A 和非 B	某个矛盾	从 A 和非 B 进行顺推以得到矛盾.
构造法	当 B 中出现词"存在一个"或"存在一些"等等时.	A	存在所希望的事物	用猜测、构造等等作出有这种性质的事物而证明所说的事情发生
选择法	当 B 中出现词"对所有的"、"对每一个"等等时.	A 和选择一个具有这种性质的事物	使所说的事情发生	从 A 和具有这种性质的事物着手作顺推，也从这件事情发生着手作倒推.
归纳法	当 B 是对从某一个整数 k 开始的每一个整数是真的时.	命题对 n 是真的	命题对 $n+1$ 是真的，也证明它对 k 是真的.	首先每一处的 n 都用代替 k 并证明它是真的，然后对 n 引用归纳假设证明对 $n+1$ 是真的.
特殊化法	当 A 中有词"对所有的"、"对每一个"等等时.	A	B	将 A 特殊化到一个特殊事物上来着手进行顺推，这个事物是在倒推过程中得到的.

（续表）

证明方法	什么时候用它	假设是什么	结论是什么	怎样做
唯一性法(I)	当 B 中出现词"唯一"时.	有两个这样的事物和 A	两个事物相等	通过 A 和事物的性质进行顺推并且倒推，以证明这两个事物相等.
唯一性法(II)	当 B 中出现词"唯一"时.	有两个不同的事物和 A	某个矛盾	通过 A 和事物的性质以及它们不同的事实，着手进行顺推.
互斥法(I)	当 B 有"C 或者 D"的形式时.	A 和非 C	D	从 A 和非 C 进行顺推又从 D 进行倒推.
互斥法(II)	当 B 有"C 或者 D"的形式时.	A 和非 D	C	从 A 和非 D 进行顺推又从 C 进行倒推.
极大-极小法(I)	当 B 有"$\max S \leqslant x$"或"$\min S \geqslant x$"的形式时.	在 S 中选择一个 s 和 A	$s \leqslant x$ 或 $s \geqslant x$	从 A 和 $s \in S$ 进行顺推也可进行倒推.
极大-极小法(II)	当 B 有"$\max S \geqslant x$"或"$\min S \leqslant x$"的形式时.	A	在 S 中构造一个 s 使得 $s \geqslant x$ 或 $s \leqslant x$.	用 A 和构造法去产生所希望的 S 中的 s.

当命题 B 中有否定词时，也许应该用换质位法或者矛盾法. 其它要看出的关键词是"唯一"，"或者"以及"极大"和"极小"，与之相应的应该用唯一性法、互斥法以及极大-极小法. 如果不能根据 B 的形式进行选择，就应该用顺推-倒推法来进行. 表 8 提供了一个全面的总结.

现在已准备好去"说"数学语言了，因为新"词汇表"和"语法"已经完成了. 关于证明论断、定理、引理和推论，已经学过了三种主要的证明方法，这就是顺推-倒推法、换质位法和矛盾法. 也知道了量词以及与它相应的构造法、选择法、归纳法和特殊化法. 对于特殊情况，在证明方法中也有唯一性法、互斥法和极大-极小法. 如果所有这些证明方法都失败了，而你坚持要问我还有什么方法——那我是什么也说不出来了！

习　题

12.1　指出下列每个命题应该用哪种方法证明，并说明理由.

(a) 如果 p 和 q 是奇数，那么方程 $x^2+2px+q=0$ 对于 x 没有有理数解.

(b) 对于 $n\geqslant 4$ 的每个整数 n，有 $n!>n^2$.

(c) 如果 f 和 g 是凸函数，那么 $f+g$ 也是凸函数.

(d) 如果 a, b 和 c 是实数，那么 $ab+bc+ca$ 满足条件 $a^2+b^2+c^2=1$ 的最大值 $\leqslant 1$.

(e) 在平面内，通过给定直线 l 上一点 p，并且与直线 l 垂直的直线有且只有一条.

(f) 如果 f 和 g 是两个函数，具有性质

(1) 对所有实数 x，有 $f(x)\leqslant g(x)$，

(2) 不存在实数 $M>0$，使得对所有 x，有 $f(x)\leqslant M$.

那么不存在实数 $M>0$，使得对任意 x，有 $g(x)\leqslant M$.

(g) 如果函数 f 和 g 在点 x 处连续，那么 $f+g$ 也在点 x 处连续.

(h) 如果函数 f 与 g 在点 x 处连续，那么对于每一个实数 $\varepsilon>0$，存在一个实数 $\delta>0$，使得对所有具有 $|x-y|<\delta$ 的实数 y，有

$$|f(x)+g(x)-(f(y)+g(y))|<\varepsilon.$$

(i) 如果 f 是一个单变量函数，$f(x)=2^x+\frac{x^2}{2}$，那么存在一个在 0 与 1 之间的实数 x^*，使得对所有 y，有 $f(x^*)\leqslant f(y)$.

12.2 叙述如何使用下列每种方法去证明"对 $n\geqslant 4$ 的每个整数，有 $n!>n^2$"，并指出假设是什么？结论是什么？

(a) 归纳法.

(b) 选择法.

(c) 顺推-倒推法(提示：将问题转化成"如果……那么……"的等价形式).

(d) 矛盾法.

附录 A：整体综合 I

在这个附录中将用具体例子说明怎样阅读和理解按教科书中流行的形式写出的证明．然后通过讲述一个例题来说明解题的一般性策略．

由于大多数证明是用流行写法，所以必须了解在这种写法中所用的是什么证明方法和为什么要用这种方法．一个写出的证明之所以会变得难以理解，通常是由于作者省略了思考过程，这就迫使你去重新进行思考．要这样做，就要求你了解作者对这个问题运用的是哪种证明方法以及是怎样用的．用下面的例子来说明怎样阅读证明．与以前的例子不同，这里将简练的证明放在了解释怎样阅读它的证明概要之前．

这个例子与实数的“无界”集合的概念有关．所谓无界集合是指在这个集合中存在元素，它离 0“任意的”远．先给出有界集合的正式定义．

定义 17　设 S 是某些实数组成的集合．如果存在一个实数 $M>0$，使得对集合 S 的所有元素 x，都有 $|x|<M$，那么说集合 S 是有界的．

例 15　如果 S 是某些实数所组成的集合 T 的子集合，并且 S 是无界的，那么 T 也是无界的．

例 15 的证明

为便于参考，将证明的每一句话，单独的写成一条．

S_1：设 S 是集合 T 的一个子集合，假设与结论相反，T 是有界的．

S_2：因此，存在一个实数 $M'>0$，使得对 T 中的所有 x，

有 $|x|<M'$.

S_3: 将证明 S 是有界的.

S_4: 为此,令 x' 是 S 中的一个元素.

S_5: 因为 S 是 T 的子集合,所以 x' 在 T 中.

S_6: 这样一来, $|x'|<M'$,于是 S 是有界的, 这是一个矛盾.

证明概要 给出从 S_1 到 S_6 的每一步的解释.

S_1 的解释: 首先指出是用矛盾法来做这个证明的, 并且相应地假设 A(的一部份)是真的, 即 S 是 T 的一个子集合, 也假设非 B 是真的,即 T 是有界的.

注意, 虽然假设了 S 是无界的, 但作者没有明确地指出这一点.

运用矛盾法是并不意外的. 因为例子的结论已经出现了否定词. 有时先浏览一下证明, 找到作者要推出什么矛盾是有好处的. 在 S_6 中说 S 是有界的, 这与 S 不是有界的假设相矛盾. 这样,再从 S_2 看到 S_6, 有目的地去看作者是怎样从 A 和非 B 着手进行顺推而得到这个矛盾.

S_2 的解释: 从命题非 B(即 T 是一个有界集合)着手进行顺推,通过定义 17 而断定存在实数 $M'>0$, 使得对 T 中所有元素 x, 有

$$|x|<M'.$$

S_3 的解释: 这里作者指出的目的是证明 S 是有界的,但并没有给出 S 有界从而得到矛盾的理由.

S_4 的解释: 初看这一步似乎很隐秘, 这是因为省略了思考过程中的几个步骤. 作者已经不明显地提出了如下抽象问题:"怎样才能证明一个集合(即 S)是有界的?"然后使用定义 17 来回答这个问题,从而必须证明存在一个实数 $M>0$, 使得对 S 中的所有数 x, 有 $|x|<M$.

这里出现了量词“存在”就应该用构造法去找所需要的值 M. 为什么没有告诉你 M 的值是 M' 呢(见 S_2)？真是这样的话，就必须说明 M' 具有希望的性质，即 $M'>0$(M' 已具有这一性质)，并且对 S 中所有实数 x，有 $|x|<M'$.

这样，在倒推过程中出现了量词“对所有的”，接下去就一定要用选择法. 作者在 S_4 中正是这样做的，在那里他指出：“…令 x' 是 S 中的一个元素”. 一旦选出了 S 中的元素 x'，接下去就一定要证明 $|x'|<M'$，但作者没有明确说出他将要去做的事. 注意，在 S_4 中用“令”这个词，表示已经使用了选择法.

造成 S_4 如此难以理解的原因是缺少足够的细节，特别是省略了抽象问题及其回答，以及一些其它步骤. 这样的一些细节常常留给读者去作.

S_5 的解释：在 S_5 中，作者突然转换到顺推过程并且从 A(即从 S 是 T 的子集合这个事实)出发进行顺推. 通过应用子集合的定义，断定 S 中的所有元素 x 在 T 中(见定义 14). 接着，作者没有指明将这个命题特殊化到 S 中的特殊值 x' 上，而断定了 x' 在 T 中. 注意，作者再一次省略了部份思考过程而留给读者去作. 为什么必须证明 x' 在 T 中呢？这是为了证明 $|x'|<M'$.

S_6 的解释：在这里，作者最后断定 $|x'|<M'$. 这样就证明了 S 是有界的，并且推出与题设 S 是无界的相矛盾. 这里仅有的问题是作者怎样得到 $|x'|<M'$ 的结论的，因为他没有指出具体的证明方法. 实际上，作者已经使用了特殊化法，将 S_2 中的命题特殊化到特殊值 x' 上. 但是回想一下，当用特殊化法时，必须验证所考虑的特殊事物(在这里是 x')具有所说的性质(在这里是 x' 在 T 中). 这个事实在 S_5 中已经给出，不过那时作者没有告诉你为什么要证明 x' 在 T 中.

再读一遍上述简练证明，就知道为什么它难以理解．这是因为没有说明使用的具体方法，特别是没有指出抽象过程和使用了特殊化方法．另外，作者又省略了一部份思考过程．当补充上这些遗漏的步骤以后，便理解这个证明了．

当你阅读证明时可以利用上面的总结．并且希望你亲自做一些工作，来学会识别所使用的各种方法．首先看作者使用的是原始形式的顺推-倒推法还是矛盾法．然后看所用的方法中又包含哪些别的方法，是不是有量词出现，相应地是用选择法、归纳法、构造法和特殊化法中的哪一种或哪几种．对于在选择法和特殊化法中出现的复杂记号要特别注意．例如，在例 15 的简练证明中，作者可以用记号“x”和“M”来代替“x'”和“M”．如果是这样做的，那就不得不去区别在以下两个命题中出现的 x：在“对所有具有某种性质的 x，某件事情发生”这个命题中，“x”指的是一般事物；而在“令 x 具有某种性质”这种形式的命题中，“x”指的是一个特殊事物．将用附录 B 的例子说明，在同一证明中一个记号的双重用法是会造成混乱的．

当你对一个写出的证明的某一步不能接着推下去时，看样子很可能是由于缺乏足够的细节．为了弥补这个缺陷，要学会自已怎样将这个证明继续做下去，然后看看写出的证明与你自已的思考过程是否一致．

已经知道了怎样去阅读一个证明，现在到了你自已去做出证明的时候了．在下面的例子中，特别说明怎样由所考虑命题的形式来决定需要使用的方法．

例 **16**　如果 T 是某些实数所组成的一个有界集合，那么 T 的任意子集合都是有界的．

证明概要　考察命题 B，一定会发现量词“任意一个”，因而应该用选择法来作证明．相应地，应该写出“令 S 是 T 的

一个子集合，将证明 S 是有界的”．于是这个将要证明的新命题是

B_1: S 是有界的．

由于看不出 B_1 有任何特别形式，用顺推-倒推法进行或许是最好的方法．这就是从 B_1 进行倒推，直到不再有效果时为止．然后用 T 是某些实数所组成的一个有界集合的假设来进行顺推．

从 B_1 进行倒推，你能提出一个抽象问题吗？这样的问题是:“怎样才能证明一个集合(即 S)是有界的？”回答抽象问题的合理途径是用定义．在这里就必须证明:

B_2: 存在一个实数 $M>0$，使得对 S 中的所有元素 x，有 $|x|<M$.

量词“存在”的出现指出应该用构造法，也指出应该转向顺推过程去产生所需要的 M 的值．从假设 T 是有界的着手进行顺推，你能推出一些什么结果？至少总可以应用定义，由此你能够断定:

A_1: 存在一个实数 $M'>0$，使得对 T 中的所有元素 x，有 $|x|<M'$.

注意，已经用记号“M'”来代替“M”了，这是因为在倒推过程中已经使用过“M”了．

也许 M' 是 B_2 中想要求的 M 值．在使用构造法时，试图用“明显”的方式来构造所需要的事物，一般来说是合理的．在这里意味着令 $M=M'$．要想这个“猜测”是正确的，一定要证明所说的性质成立（即 $M>0$），而且所说的这件事情发生（即对 S 中的所有 x，有 $|x|<M$）．因为 $M'>0$，$M=M'$，不难看到 $M>0$．于是剩下来的只要证明

B_3: 对所有 S 中的元素 x，有 $|x|<M$.

出现量词“对所有的”，应该用选择法选择 S 中的一个元

素，不妨记为 x'，对 x' 来证明

B_4: $|x'|<M$ 或 $|x'|<M'$（因为 $M=M'$）.

注意，为了避免与记号"x"混淆，已经用记号"x'"来表示一个特殊事物．在这里，怎样得到 $|x'|<M'$ 的结论是不清楚的，因而要仔细考察命题 A_1.只要能将命题 A_1 特殊化到 $x=x'$ 上，就可以使用特殊化法得到所希望的 $|x'|<M'$ 的结论．而要能够这样做，就必须确信所考虑的特殊事物（即 x'）确实满足所说的性质（即 x' 在 T 中）．所以目的是证明 x' 在 T 中．

回忆一下，x' 是从 S 中选出来的一个元素，而且 S 是从 T 中选出来的一个子集合．怎样利用这些信息去证明 x' 在 T 中呢？从子集合的定义出发作顺推，知道对 S 中的所有 x，x 在 T 中．这样，确实能把命题 A_1 特殊化到 $x=x'$ 上，这就是由于知道 x' 在 S 中而达到证明 x' 在 T 中的目的．证明完毕．//

例 16 的证明　令 S 是 T 的一个子集合，为了证明 S 是有界的，将证明有一个实数 $M>0$ 具有性质：对 S 中的所有 x，有 $|x|<M$.

由于题设 T 是有界的，所以存在实数 $M'>0$，使得对 T 中的所有 x 都有 $|x|<M'$．令 $M=M'$，为了看出 M 具有想要的性质，令 x' 是 S 中的一个元素．因为 S 是 T 的一个子集合，x' 在 T 中，从而得出想要的结论：$|x'|<M=M'$．证明完毕．//

解决疑难问题不是一门精确的学科．在这里只能给出些一般性的建议，较多的细节讨论可在波利雅的《怎样解题》一书中找到．

当试图证明"A 推出 B"时，我们可以根据 B 的形式有意识地选择一种证明方法．如果 B 没有特别形式，那么最好是用顺推-倒推法进行证明．如果这样不成功，那么可用其他方

法试一试．也可以试着问自已，为什么 B 不能是假的，于是导致你使用矛盾法(或者换质位法)．

由于某种原因，用某种方法不能完成证明时，要有意识地去寻找另一种适当的证明方法．有时将命题 B 的形式进行加工，便可找到另外方法．例如，命题 B 中出现量词“对所有的”并写成以下标准形式：

对所有具有“某种性质”的“事物”，使得(有)“某件事情发生”．

如果对它用选择法失败，那么可以试着将 B 改写为以下形式：

不存在具有“某种性质”的“事物”，使得“某件事情不发生”．

由于在这种形式中出现了否定词，就可以使用矛盾法了．假设有一个事物具有所说的性质，使这件事情不发生．目的是推出一个矛盾．

对命题 B 的各种形式，通常最好是先试着用相应的证明方法．在思考一个证明时，要记得所考虑的命题有什么样的形式，将决定使用哪种方法进行证明．

如果你遇到了一些问题而疑惑不解时，你将这些问题暂时放下还是有利的．因为当你回过来看时，也许会看到新的解决途径．毫无疑问，当你作过很多的题目后，你将会找到许多窍门．

附录B：整体综合 II

这个附录将使你在阅读证明和做出证明方面得到更多的练习．这里提出的例子比附录 A 中提出的更困难些．所增加的困难，有一部分是由于所考虑的命题含有三个而不是两个量词．

第一个例子是为了教你怎样阅读可能在教科书中出现的简练证明．因此简练证明放在详细的概要之前，然后用这个概要去解释怎样阅读简练证明．这个例子是关于单变量函数的“连续”概念，它指的是，如果变量的值有“微小”的改变，那么函数的值就不会有“根本”的改变。函数连续的另一种说法是，使铅笔不离开纸面而能画出它的曲线．下面给出连续的正式定义．

定义 16 设 f 是一个单变量函数，如果对于每个实数 $\varepsilon>0$，存在一个实数 $\delta>0$，使得具有性质 $|x-y|<\delta$ 的所有实数 y，可以得到 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，那么说 f 在点 x 处连续．

例 17 如果 f 和 g 是在点 x 处连续的两个函数，那么函数 $f+g$ 也在点 x 处连续(注：函数 $f+g$ 在任意点 y 处的函数值为 $f(y)+g(y)$)．

例 17 的证明

为了便于参考，将证明的每一句话单独写成一条．

S_1：为了证明函数 $f+g$ 在 x 处连续，令 $\varepsilon>0$．

S_2：将证明存在一个 $\delta>0$，使得对所有满足 $|x-y|<\delta$ 的 y，有

$$|f(x)+g(x)-(f(y)+g(y))|<\varepsilon$$

S_3: 因为 f 在点 x 处连续，所以存在 $\delta_1>0$，使得对所有满足 $|x-y|<\delta_1$ 的 y，有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

S_4: 同样，因为 g 在点 x 处连续，所以存在 $\delta_2>0$，使得对所有满足 $|x-y|<\delta_2$ 的 y，有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

S_5: 令 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$（它是大于 0 的）再令 y 具有性质 $|x-y|<\delta$.

S_6: 那么 $|x-y|<\delta_1$, $|x-y|<\delta_2$，因而

$$|f(x)+g(x)-(f(y)+g(y))|\leqslant|f(x)-f(y)|$$
$$+|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

证明完毕. //

证明概要 给出从 S_1 到 S_6 的每一步的解释.

S_1 的解释：这句话表明使用顺推-倒推法进行证明. 因为"为了证明函数 $f+g$ 在点 x 处连续"这句话，意味着作者打算证明命题 B 是真的. 问题是作者为什么说"…令 $\varepsilon>0$"？这与证明 $f+g$ 在点 x 处连续有关. 所说的这一切是作者已经暗中提出抽象问题："怎样才能证明一个函数（即 $f+g$）在一点（即 x）处是连续的？"并且应用定义 18 来回答，从而必须证明对每个 $\varepsilon>0$ 定义 18 中所说的事情发生.

在倒推过程中看到量词"对所有的的"应该使用选择法，选择 $\varepsilon>0$ 的一个特殊值. 所以作者才说"…令 $\varepsilon>0$". 注意，在连续的定义中出现的记号"ε"指的是 ε 的一般值，而在 S_1 中出现的记号"ε"指的是由选择法选出的一个特殊值. 一个记号的双重使用会造成混乱，但在写出的证明中恰好是共用的.

使 S_1 如此难以理解的原因是作者省略了部分思考过程，即省略了抽象问题及其回答．这些细节往往留给读者去作．

S_2 的解释：作者明确指出要去做什么，但为什么要证明存在一个 $\delta>0$，使得 S_2 中所说的那件事情发生呢？回想一下，在 S_1 中，利用选择法选出一个 $\varepsilon>0$，从而必须证明对于这个 ε，定义 18 中所说的事情发生．定义 18 中所说的事情就是在 S_2 中所说的事情："存在一个 $\delta>0\cdots$"(参看定义 18)．

S_3 的解释：作者已转向顺推过程(从 S_2 看到了量词"存在"，提示使用构造法来产生所希望的 $\delta>0$)．作者是从假设 f 在点 x 处连续用定义 18 着手顺推．但作者没有告诉你，在定义中出现了量词"对所有的"已经将命题(定义)特殊化到 $\frac{\varepsilon}{2}$ 这个值上，此处的 ε 是在 S_1 中选取的．注意，在定义 18 中的记号"ε"指的是一般值，而在 S_1 中的记号"ε"指的是 ε 的特殊值．在这里作者为什么决定取 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的特殊值而不是 ε 呢？这里暂不解释，这样作的理由在 S_6 中才会清楚．

S_4 的解释：作者明确地使用在 S_3 中所用的方法，根据 g 在点 x 处连续的事实进行顺推．记住，从 S_2 开始作者就试图构造一个 $\delta>0$ 的值，使得 S_2 中所说的事情发生．

S_5 的解释：在这里构造出所希望的 $\delta>0$ 的值．这个值是由 S_3 和 S_4 中分别得出的 δ_1 和 δ_2 结合在一起而给出的，即 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$．这里仍然不清楚为什么用这种方法构造 δ．因为作者的任务是构造 $\delta>0$，使 δ 具有所希望的性质，即对所有适合 $|x-y|<\delta$ 的 y，有 $|f(x)+g(x)-(f(y)+g(y))|<\varepsilon$(见 S_2)．

在 S_5 中作者没有说明 $\delta>0$(这是成立的，因为 δ_1, δ_2 都大于 0)，也没有说明"…令 y 具有性质 $|x-y|<\delta$"的理由．这

是因为要用选择法来证明对所有具有性质 $|x-y|<\delta$ 的 y，有

$$|f(x)+g(x)-(f(y)+g(y))|<\varepsilon$$

这里还要注意记号"y"的双重用法．如果要完成这个证明，必须证出

$$|f(x)+g(x)-(f(y)+g(y))|<\varepsilon.$$

S_6 的解释：在这里作者断定 $|f(x)+g(x)-(f(y)+g(y))|<\varepsilon$．这个结论是怎样得到的呢？不难看出

$$|f(x)+g(x)-(f(y)+g(y))|\leqslant|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|$$

这是因为两个数（即 $f(x)-f(y)$ 与 $g(x)-g(y)$）的和的绝对值总是小于等于这两个数的绝对值的和．但为什么

$$|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

作者再次省略了部分思考过程．

这里用特殊化法断定了

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad 和 \quad |g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

具体地说，是将命题 S_3 和 S_4，特殊化到 S_5 中选择出的特殊值 y 上．回忆一下，当应用特殊化法时，我们必须确信所考虑的特殊事物（即 y）满足所说的性质（在这里是 $|x-y|<\delta_1$ 和 $|x-y|<\delta_2$）．在 S_6 中作者断定了 $|x-y|<\delta_1$，$|x-y|<\delta_2$．但是你能看出为什么这是真的吗？再看一遍 S_5．因为选出的 y 满足 $|x-y|<\delta$，并且 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$，所以一定得到 $\delta\leqslant\delta_1$ 和 $\delta\leqslant\delta_2$．从而确实有 $|x-y|<\delta_1$ 和 $|x-y|<\delta_2$．因此，作者完全有理由将 S_3 和 S_4 特殊化到这里的特殊值 y 上．所以能断定

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad 和 \quad |g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

换句话说，作者有理由断定

$$|f(x)+g(x)-(f(y)+g(y))|\leqslant|f(x)-f(y)|$$
$$+|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

是正确的．或许现在已清楚了为什么作者(在 S_3 和 S_4 中)要将 ε 特殊化到 $\frac{\varepsilon}{2}$ 上．

S_6 之所以如此难懂是因为省略了一部份思考过程，但你必须看出使用的是什么证明方法，并且学会补出没有给出的细节，以使所写出的证明连贯起来．

下面例题说明怎样作证明，特别要说明的是，怎样由所考虑命题的形式引出正确的方法．

例 18 如果 f 是单变量函数，并且在点 x 处满足这样的性质：存在实数 $c>0$ 和 $\delta'>0$，使得对所有满足 $|x-y|<\delta'$ 的 y，有 $|f(x)-f(y)|\leqslant c|x-y|$，那么 f 在点 x 处连续．

证明概要 从观察命题 B 以试图选择一种证明方法开始．因为 B 没有特别的形式，所以应该使用顺推-倒推法．这就提出抽象问题："怎样才能证明一个函数(即 f)在一点(即 x)处是连续的？定义通常提供了一个回答，就是要证明

B_1：对所有 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得对所有满足 $|x-y|<\delta$ 的 y，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$．

看一下 B_1，一定能看出量词"对所有的"，所以用选择法来选择一个 $\varepsilon>0$ 的特殊值．对这个选择出的特殊值应该用一个与"ε"不同的记号，以避免混淆．在简练的证明中可以写作"令 $\varepsilon'>0\cdots$"．一旦你已经选择好 $\varepsilon'>0$，选择法要求你证明所说的事情发生．在这里是证明

B_2：存在一个 $\delta>0$，使得对所有满足 $|x-y|<\delta$ 的 y，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon'$．

看一下 B_2，一定会看出量词"存在"，所以使用构造法去

产生所希望的 δ 的值．当使用构造法时，比较适当的是转向顺推过程以产生所希望的事物．

由假设存在实数 $c>0$ 和 $\delta'>0$，使得假设中所说的事情发生而作顺推．应该构造出 δ，也许 $\delta=\delta'$（或者 $\delta=c$）．为什么不去"猜测"$\delta=\delta'$ 并且看看是否正确呢？如果不正确，那么也许将发现 δ 该有什么样的适当值．为了检验 $\delta=\delta'$ 的猜测是否正确，必须看看 δ' 是否具有 B_2 中所要求的性质，而且是否使 B_2 中所说的事情发生．B_2 中要求 $\delta>0$．但是当 $\delta=\delta'$ 时，由 $\delta'>0$，必定有 $\delta>0$．余下的只是验证对 $\delta=\delta'$ 有

B_3：对于所有满足 $|x-y|<\delta$ 的 y，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon'$．

从 B_3 一定会看出在倒推过程中出现了量词"对所有的"，所以应该使用选择法去选出一个 y 的特殊值，记为 y'，满足 $|x-y'|<\delta$．选择法要求你证明所说的事情发生，这里是证明

B_4：$|f(x)-f(y')|<\varepsilon'$

看不出 B_4 是否是真的．但假设中仍有一些没有用到的信息，特别是 $c>0$ 没有用到，下面的命题也没有用到

A_1：对所有满足 $|x-y|<\delta'$ 的 y，有 $|f(x)-f(y)|\leqslant c|x-y|$．

转向顺推过程，当看到量词"对所有的"时，也许你将考虑采用特殊化法．问题是将 y 特殊化到哪个值上．我们不妨试一试在倒推过程中得到的 y'．幸运地是被选出的 y' 具有在 A_1 中所说的性质（因为 $|x-y'|<\delta$ 和 $\delta=\delta'$，故 $|x-y'|<\delta'$），因此能将 A_1 中的 y 特殊化到 y' 上，得到

A_2：$|f(x)-f(y')|\leqslant c|x-y'|$

回忆一下，在倒推过程中得到的最后命题是 B_4，为了完成证明，看看 A_2 是否能改写得更像 B_4．因为选出的 y' 满足 $|x-$

$y'|<\delta$, 所以 A_2 能够改写为

$$A_3: \quad |f(x)-f(y')|\leqslant c\delta$$

如果已经知道 $c\delta$ 小于 ε' 就会得到 B_4, 可惜我们只知道 $\delta=\delta'$, 并不知道 $c\delta'<\varepsilon'$, 这说明原来的猜想 $\delta=\delta'$ 是不正确的. 也许应该"猜测"δ, 使得 $c\delta<\varepsilon'$, $\delta>0$. 为什么不去等价地"猜测" $0<\delta<\dfrac{\varepsilon'}{c}$ 呢? 为了要看看这新的"猜测"$0<\delta<\dfrac{\varepsilon'}{c}$ 是否正确, 必须检验对于 δ 的这个值, B_2 中所说的性质是否成立, 并且所说的事情是否发生. 显然已经有了 $\delta>0$, 所以 B_2 中所说的性质成立. 剩下的只是验证对 δ 的这个值 B_2 中所说的事情发生, 即证明 B_3 是真的.

与前面相同, 用选择法选出 y' 适合 $|x-y'|<\delta$, 再证明 B_4 是真的. 前面是将 A_1 中的 y 特殊化到 y' 上, 然而这里却存在一个问题, 因为你并不知道 y' 满足 A_1 中的性质, 即 $|x-y'|<\delta'$, 而只知道 $|x-y'|<\delta$ 和 $0<\delta<\dfrac{\varepsilon'}{c}$. 要是对 A_1 应用特殊化法, 就刚好可得出 A_3. 最后因为 $c\delta<\varepsilon'$, 所以能得到所希望的结论, B_4 是真的.

你能够"猜测"出怎样的 $\delta>0$, 使得 $c\delta<\varepsilon'$ 并且同时能将 A_1 中的 y 特殊化到 y' 上吗? 回答是 $0<\delta<\min\left\{\delta', \dfrac{\varepsilon'}{c}\right\}$. 因为当选择 y' 满足 $|x-y'|<\delta$ 时, 由于 $\delta<\delta'$, 将得出 $|x-y'|<\delta'$. 这样就可以将 A_1 中的 y 特殊化到 y' 上. 由 A_2 和 $\delta<\dfrac{\varepsilon'}{c}$ 的事实可以断定

$$|f(x)-f(y')|\leqslant c|x-y'|<c\delta<c\left(\frac{\varepsilon'}{c}\right)=\varepsilon'.$$

于是完成了证明.

例 18 的证明 为证明 f 在点 x 处连续, 令 $\varepsilon'>0$. 根据

假设能够构造 $0<\delta<\min\left\{\delta', \frac{\varepsilon'}{c}\right\}$. 那么对满足 $|x-y'|<\delta$ 的 y', 能够得到 $|x-y'|<\delta'$. 所以根据假设有 $|f(x)-f(y')| \leqslant c|x-y'|<c\delta$. 此外因为 $\delta<\frac{\varepsilon'}{c}$, 故有 $|f(x)-f(y')|<c\delta<c\left(\frac{\varepsilon'}{c}\right)=\varepsilon'$. 证明完成. //

就象任何语言的读、写和说同实践紧密相关一样，这些证明方法也只是为你向正确的方向起步而设计的.

习 题 解 答

1

1.1　(a), (c), (e)和(f)是命题.

1.2　(a) 假设：直角三角形 XYZ 的直角边长是 x 和 y，斜边长是 z，面积是 $\frac{z^2}{4}$.

结论：XYZ 是等腰三角形.

(b) 假设：n 是偶数.

结论：n^2 是偶数.

(c) 假设：a, b, c, d, e 和 f 都是实数，具有性质 $ad-bc\neq 0$,

结论：线性方程组

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$$

对 x, y 有解.

(d) 假设：n 是正整数.

结论：前 n 个整数的和是 $\frac{n(n+1)}{2}$.

(e) 假设：r 是实数并且满足 $r^2=2$.

结论：r 是无理数.

(f) 假设：p, q 是正实数并且 $\sqrt{pq}\neq\frac{p+q}{2}$.

结论：$p\neq q$

(g) 假设：x 是实数.

结论：$x(x-1)$的最小值至少是 $-\frac{1}{4}$.

1.3　如果我们要证明“$A \Rightarrow B$”是真的，并且已经知道 B 是假的，那么我们应该证明 A 也是假的。理由是，如果 A 是假的，那么不管 B 是真的或假的，由表1“$A \Rightarrow B$”是真的。反之，如果 A 是真的，而 B 是假的，那么“$A \Rightarrow B$”就是假的了。

1.4　(a) 是真的，因为 A 是假的。

(b) 是真的，因为 A 和 B 都是真的。

(c) 是真的，因为 B 是真的，与 A 的真假性没有关系。

(d) 如果 x 不是3，那么命题是真的，因为 A 是假的。如果 x 是3，那么命题就是假的，因为 A 是真的。

1.5　(a) (T=真，F=假)

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

(b) (T=真，F=假)

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	T	T
F	F	F	T	F

2

2.1 顺推过程的主要工作是运用作为假设的命题 A 中的信息. 倒推过程是求出一串命题或一个命题链，以导致结论即命题 B 是真的. 为了得到这个命题链，应该在倒推过程中运用抽象过程，每运用一次便引出一个命题.

明确地说，倒推过程由我们要证明它为真的命题 B 开始. 然后运用抽象过程，提出并回答抽象问题，从而引出一系列新命题. 当它们是真的时，则 B 是真的. 抽象过程一直继续到以下情形为止：或者我们得到了命题 A，或者我们再不能提出或回答抽象问题. 倒推过程的困难之一是抽象问题可能多于一个. 如果出现这种情况，应该用 A 中的信息来帮助我们选择一个适当的抽象问题. 倒推过程的另一个困难是抽象问题的回答多于一个，而且其中有些不可能用来完成证明.

顺推过程从假设命题 A 是真的开始，并且由此引出一系列新命题，作为 A 是真的的结果，这些命题也是真的. 每一个由 A 引出的新命题都可以直接与倒推过程引出的最后一个命题相连结. 倒推过程最后这个命题可用来作为指引顺推过程的灯塔，这正象顺推过程的最后命题能帮助我们选择正确的抽象问题和正确的抽象回答一样.

2.2 (c) 是不正确的，因为它使用了所给题目中的特有记号.

2.3 (a) 是正确的，因为它是抽象地问怎样才能证明 B 是真的. (b)和(c)是不正确的，因为它使用了所给命题 A 中的特有记号. (d)对这个题目是一个错误的问题.

2.4 (a) 怎样才能证明两条直线是平行的？怎样才能证明两条直线不相交？怎样才能证明两条切线是平行的？怎样才

能证明通过圆的直径端点的两条切线是平行的？

(b) 怎样才能证明函数是连续的？怎样才能证明两个函数的和是连续的？怎样才能证明两个连续函数的和是连续的？

(c) 怎样才能证明一个整数是偶数？怎样才能证明一个数是偶数？怎样才能证明一个整数不是奇数？怎样才能证明一个整数的平方是偶数？

(d) 怎样才能证明一个二次方程的根是某个特殊整数？怎样解一个二次方程？怎样才能证明两个二次方程有共同的根？

2.5 (a) 证明它们的差是零；证明一个小于等于另一个，并且反过来也对；证明它们的商是1；证明它们都与第三个数相等.

(b) 证明对应的边、角、边相等；证明对应的角、边、角相等；证明对应的边、边、边相等；证明它们与第三个三角形全等.

(c) 证明它们在同一平面内并且不相交；证明它们都垂直第三个平面；证明它们有相等的斜率；证明它们对应的方程相同或没有公共解；证明它们都平行于第三条直线.

(d) 证明它有三个 90° 的角；证明它是正方形；证明它是有一个直角的平行四边形.

2.6 (a) (1) 怎样才能证明二次方程的根是正的？

(2) 证明二次方程求解公式给出正的根.

(3) 证明根 $-\frac{b}{a}$ 是正的.

(b) (1) 怎样才能证明三角形是等边的？

(2) 证明三个边的长相等，或三个角相等.

(3) 证明 $\overline{RT}=\overline{ST}=\overline{SR}$，或证明 $\angle R=\angle S=\angle T$.

2.7 (a) $$(x-2)(x-1)<0$$

$$x(x-3)<-2$$
$$-x^2+3x-2>0$$

(b) $$\frac{x}{z}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

角 X 是45°.

$$\cos X=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(c) 圆的中心在点(3, 2)处.

圆的半径是5.

圆截 y 轴于点(0, 6)和(0, −2).

$x^2-6x+9+y^2-4y+4=25$.

(d) $\overline{UV}=\overline{VW}=\overline{UW}$.

$\angle U=\angle W=\angle V=60°$.

三角形是等腰的.

三角形的高是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 乘以边长.

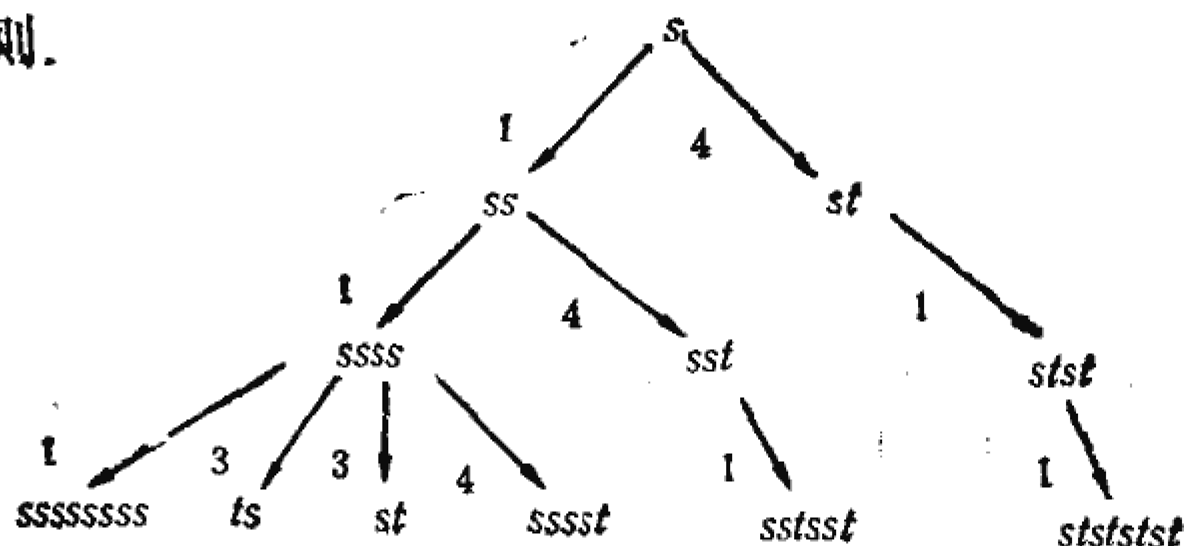
2.8 (d) 不成立，因为没有"$x\neq5$"的假设，如果 $x=5$，那么不能用 $x-5$ 除.

2.9 (a) 证明概要：由结论提出的抽象问题是："怎样才能证明一个实数(即 x)是零"？为了证明 $x=0$，只要证明 $x\leqslant0$ 和 $x\geqslant0$. 由假设作顺推得 $x\geqslant0$. 为了证出 $x\leqslant0$，需要证明 $x=-y$ 和 $-y\leqslant0$. 这两个命题可由假设 $x+y=0$(故 $x=-y$)和 $y\geqslant0$(故 $-y\leqslant0$)作顺推推出. 剩下的只需证明 $y=0$，这从 $x=0$ 和 $x+y=0$ 的假设可以得到. 明确地说，有 $0=x+y=0+y=0$.

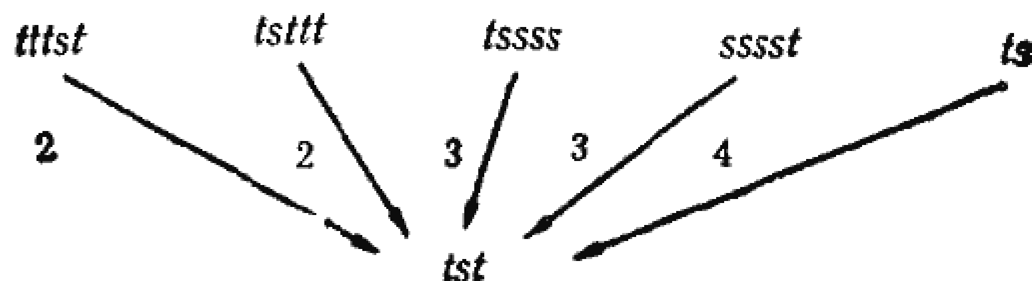
(b) **证明** 为了证出 $x=0$ 和 $y=0$，首先应该证明 $x\geqslant0$(它已由假设给出)和 $x\leqslant0$. 后者从证明 $x=-y$ 和 $-y\leqslant0$ 就可得到. 要证出 $x=-y$，注意到假设已给出 $x+y=0$，类似地有 $-y\leqslant0$，因为假设也给出 $y\geqslant0$，因此 $x=0$. 为了证出 $y=$

0，只要利用 $x=0$ 和假设 $x+y=0$ 便可得到.

2.10 (a) 下图中每个箭头左边的数表示所用的是第几条规则.



(b) 下图中每个箭头左边的数字表示所用的是第几条规则.



(c)
A:	s	已知
A_1:	ss	规则 1
A_2:	$ssss$	规则 1
B_1:	$sssst$	规则 4
B:	tst	规则 3

(d)
A:	s	已知
A_1:	tst	由 (c)
A_2:	$tsttst$	规则 1
A_3:	$tsst$	规则 2
A_4:	$tssttsst$	规则 1
B_1:	$tsssst$	规则 2
B:	$ttst$	规则 3

2.11 **证明概要** 对这个题我们有

A: 直角三角形 XYZ 是等腰的.

B: 三角形 XYZ 的面积是 $\frac{z^2}{4}$.

关于 B 的抽象问题是"怎样才能证明三角形的面积等于一个特殊值?"回答之一是用计算三角形面积的公式去证明

B_1: $$\frac{z^2}{4}=\frac{xy}{2}.$$

由假设 XYZ 是等腰三角形作顺推,得到

A_1: $$x=y.$$

A_2: $$x-y=0.$$

因为 XYZ 是直角三角形,由勾股定理,得到

A_3: $$z^2=x^2+y^2.$$

将命题 A_2 中的等式两边平方再进行恒等变形,得到

A_4: $$(x-y)^2=0.$$

A_5: $$x^2-2xy+y^2=0.$$

A_6: $$x^2+y^2=2xy.$$

将 A_3 代入 A_6,得到

A_7: $$z^2=2xy.$$

两边除以 4 便最后得到所要的结论

A_8: $$\frac{z^2}{4}=\frac{xy}{2}.$$

证明 由假设知 $x=y$ 或等价地有 $x-y=0$, 再进行一些变形,得到 $x^2+y^2=2xy$,根据勾股定理 $z^2=x^2+y^2$,将 z^2 用 x^2+y^2 代替,得到 $z^2=2xy$ 或等价地有 $\frac{z^2}{4}=\frac{xy}{2}$. 由直角三角形的面积公式知 XYZ 的面积$=\frac{xy}{2}$. 因此$\frac{z^2}{4}$是所给三角形的面积. //

2.12 **证明概要** 由结论提出的抽象问题是"怎样才能证明一个三角形是等边的?"回答之一是证明三个边有相等的长. 明确地说是证明 $\overline{RS}=\overline{ST}=\overline{TR}$. 为了看出 $\overline{RS}=\overline{ST}$,由假设作顺推,能得到三角形 RSU 全等于三角形 SUT. 明确

地说，由假设有 $\overline{RU}=\overline{UT}$，此外，$\angle RUS=\angle SUT=90°$，当然有 $\overline{SU}=\overline{SU}$，由边、角、边定理推出这两个三角形全等．最后，为了看出 $\overline{RS}=\overline{RT}$，由假设作顺推得到结论 $\overline{RS}=\overline{2RU}=\overline{RU}+\overline{UT}=\overline{RT}$．

证明　为了看出三角形 RST 是等边的，需要证明 $\overline{RS}=\overline{ST}=\overline{RT}$．因为已假设 SU 是 RT 的垂直平分线，由边、角、边定理推出三角形 RSU 全等于三角形 SUT，因此 $\overline{RS}=\overline{ST}$．为了看出 $\overline{RS}=\overline{RT}$，由假设容易断定 $\overline{RS}=\overline{2RU}=\overline{RU}+\overline{UT}=\overline{RT}$． //

3

3.1　(a) 抽象问题：怎样才能证明一个整数是奇数？

抽象回答：证明这个整数等于某个整数的 2 倍加 1．

用到所给题上的回答：证明 $n^2=2k+1$．

(b) 抽象问题：怎样才能证明一个实数是有理数？

抽象回答：证明这个实数等于两个整数的比，其中分母不为 0．

用到所给题上的回答：证明 $\frac{s}{t}=\frac{p}{q}$，其中 p, q 是整数并且 $q\neq0$．

(c) 抽象问题：怎样才能证明两个实数对相等？

抽象回答：证明构成这两个实数对的第一个数和第二个数分别相等．

用到所给题上的回答：证明 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$．

(d) 抽象问题：怎样才能证明一个整数是素数？

抽象回答：证明这个数是大于 1 的正数，并且在正整数中只能被 1 和自身整除．

用到所给题上的回答：证明 $n>1$，并且当正整数 p 整除 n 时，必有 $p=1$ 或 $p=n$。

(e) 抽象问题：怎样才能证明一个整数整除另一个整数？

抽象回答：证明第二个整数等于第一个整数与某个整数的乘积，并且证明第一个整数不为零。

用到所给题上的回答：证明对某个整数 k，下式成立：$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=9k$。

3.2 (A 是假设，A_1 是作一步顺推的结果)

(a) A: n 是奇数。

A_1: $n=2k+1$，其中 k 是整数。

(b) A: s, t 是有理数并且 $t\neq 0$。

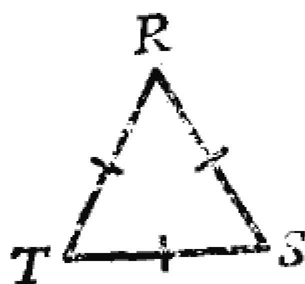
A_1: $s=\frac{p}{q}$, p, q 是整数并且 $q\neq 0$；也有 $t=\frac{a}{b}$, a, b 是整数并且 $b\neq 0$。

(c) A: RST 是等边三角形。

A_1: $\overline{RS}=\overline{ST}=\overline{RT}$ 且 $\angle R=\angle S=\angle T$。

(d) A: $\sin x=\cos x$。

A_1: $\frac{x}{z}=\frac{y}{z}$(或 $x=y$)。



(e) A: a, b, c 是整数，a 整除 b 并且 b 整除 c。

A_1: $b=pa$, $c=qb$，其中 p, q 都是整数，并且 $a\neq 0$, $b\neq 0$。

3.3 (T=真，F=假)

(a) "A 推出 B"的逆命题的真值表

A	B	A 推出 B	B 推出 A
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

(b) “A 推出 B”的否命题的真值表

A	B	非 A	非 B	非 A 推出非 B
T	T	F	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

说明：“A 推出 B”的逆命题和否命题是等价的，因为当且仅当 A 是假的 B 是真的时，它们两个都是假的.

(c) “A 或者 B”的真值表

A	B	“$A\vee B$”
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(d) “A 并且 B”的真值表

A	B	“$A\wedge B$”
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

(e) $A\wedge$(非 B)的真值表

A	B	非 B	$A\wedge$(非 B)
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

(f) (非 A)$\vee B$ 的真值表

A	非 A	B	(非 A) $\vee B$	A 推出 B
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T

说明:"A 推出 B"和"(非 A) $\vee B$"是等价的,因为只在 A 是真的 B 是假的时它们两个都是假的.

3.4 (a) 逆命题:如果 n 是偶数,那么 n^2 是偶数.

否命题:如果 n 是整数,但 n^2 不是偶数,那么 n 是奇数.

逆否命题:如果 n 是奇数,那么 n^2 是奇数.

(b) 逆命题:如果 r 不是有理数,那么 r 是使 $r^2=2$ 的实数.

否命题:如果 r 是使 $r^2\neq 2$ 的实数,那么 r 是有理数.

逆否命题:如果 r 是有理数,那么 r 是使 $r^2\neq 2$ 的实数.

(c) 逆命题:如果四边形 $ABCD$ 是矩形,那么 $ABCD$ 是有一个角是直角的平行四边形.

否命题:如果四边形 $ABCD$ 不是有一角是直角的平行四边形,那么四边形 $ABCD$ 不是矩形.

逆否命题:如果四边形 $ABCD$ 不是矩形,那么 $ABCD$ 不是有一角是直角的平行四边形.

(d) 逆命题:如果 $t=\frac{\pi}{4}$,那么对角 t 有 $\cos t=\sin t$,并且 $0<t<\pi$.

否命题:如果对角 t 有 $\cos t\neq\sin t$,并且 $0<t<\pi$,则 $t\neq\frac{\pi}{4}$.

逆否命题:如果 $t\neq\frac{\pi}{4}$,那么对角 t 有 $\cos t\neq\sin t$,并且 $0<t<\pi$.

3.5 **证明概要** 顺推-倒推法提出的抽象问题是"怎样才能证明一个整数(即 n^2)是奇数?"用奇数的定义回答这个抽象问题就是要证明对某个整数 k 有 $n^2=2k+1$. 根据假设作顺推就能得到所要的结论. 因为 n 是奇数, 由定义对某个整数 m 有 $n=2m+1$. 因而

$$n^2=(2m+1)^2=4m^2+4m+1=2(2m^2+2m)+1$$

所以所求的 k 是 $2m^2+2m$. 因为 m 是整数, 所以 $2m^2+2m$ 也是整数. 这就证明了 n^2 能表为某个整数的 2 倍加 1, 于是证明完成.

证明 因为 n 是奇数, 存在一个整数 m 使 $n=2m+1$, 所以

$$n^2=(2m+1)^2=4m^2+4m+1=2(2m^2+2m)+1$$

从而 n^2 是奇数. //

3.6 **证明概要** 顺推-倒推法开始提出的抽象问题是"怎样才能证明一个整数(即 mn)是奇数?"利用奇数的定义, 这个问题可以用证明 mn 能表成某个整数的 2 倍加 1 来回答, 现在用顺推过程来求这样的整数. 因为 m 是奇数, n 也是奇数, 有整数 b 和整数 c 使 $m=2b+1$, $n=2c+1$, 所以,

$$mn=(2b+1)(2c+1)=4bc+2b+2c+1$$
$$=2(b+c+2bc)+1$$

这就证明了 mn 能表成一个整数的 2 倍加 1, 这个整数是 $b+c+2bc$, 于是完成证明.

证明 因为 m, n 是奇数, $m=2b+1$, $n=2c+1$, 其中 b, c 是整数, 所以

$$mn=(2b+1)(2c+1)=2(b+c+2bc)+1$$

从而 mn 是奇数.

3.7 **证明概要** 顺推-倒推法提出的抽象问题是"怎样才能证明一个命题(即 A)推出另一个命题(即 C)是真的?"按

照表1这个问题的回答是，假设“推出”一词左边的命题是真的，那么应该得到“推出”一词右边的命题是真的的结论．在这里是假设 A 是真的，我们应试着证明 C 也是真的．作顺推，由假设中的信息我们看到，因为“A 推出 B”是真的和 A 是真的，所以 B 必须是真的．由 B 是真的，“B 推出 C”是真的，从而 C 也必须是真的．于是完成证明．

证明 为了断定“A 推出 C”是真的，假设 A 是真的，由假设“A 推出 B”是真的，故 B 必须是真的，再由“B 推出 C”是真的，必须有 C 是真的，这就完成了证明．

3.8 **证明概要** 顺推-倒推法提出的抽象问题是“怎样才能证明两个命题(即 A 和 B)等价？”根据定义8，必须证明“A 推出 B”是真的(假设中已给出)和“B 推出 A”是真的．由假设“B 推出 C”和“C 推出 A”以及习题3.7可得到“B 推出 A”是真的．证明 A 等价于 C 是类似的．

证明 为了证明 A 等价于 B，只要证明“B 推出 A”，因为假设中已给出“A 推出 B”．由假设“B 推出 C”，“C 推出 A”以及习题3.7，可得到“B 推出 A”．A 等价于 C 的证明省略．

3.9 (a) 证明 A 等价于这三个可以代替它的定义中的每一个要作6个证明．这6个证明是：$A \Rightarrow B, B \Rightarrow A, A \Rightarrow C, C \Rightarrow A, A \Rightarrow D, D \Rightarrow A$．

(b) 需要作四个证明，即 $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, $C \Rightarrow D$ 及 $D \Rightarrow A$．

(c) 如果(b)中这四个命题已是真的，那么利用习题3.7能够证明 A 等价于这些可以代替它的定义中的每一个．例如，要证明 A 等价于 D，因为已有“D 推出 A”，再利用习题3.7，根据“A 推出 B”，“B 推出 C”和“C 推出 D”就能得到“A 推出 D”．

3.10 (a) **证明概要** 顺推-倒推法提出的抽象问题是"怎样才能证明三角形是等腰的？利用等腰三角形的定义，我们证明它有两个边的长相等，在这里是证明 $u=v$. 作顺推，已经假设 $\sin U=\sqrt{\frac{u}{2v}}$，由正弦定义 $\sin U=\frac{u}{w}$，所以 $\sqrt{\frac{u}{2v}}=\frac{u}{w}$. 经过恒等变形得到 $w^2=2uv$. 再根据勾股定理 $u^2+v^2=w^2$，将 w^2 代入得到 $u^2+v^2=2uv$，因此 $u^2-2uv+v^2=0$. 因式分解后再取等式两边的平方根，推出 $u-v=0$，即 $u=v$. 证明完成.

证明 因为 $\sin U=\sqrt{\frac{u}{2v}}$，$\sin U=\frac{u}{w}$，有 $\sqrt{\frac{u}{2v}}=\frac{u}{w}$，从而 $w^2=2uw$. 根据勾股定理，$w^2=u^2+v^2$，再用 $2uv$ 代替 w^2，经过变形，得到 $u=v$. //

(b) **证明概要** 为了验证三角形 UVW 满足例1的假设，将记号作对比，即是 $x=u$，$y=v$，$z=w$，这就需要证明 $\frac{uv}{2}=\frac{w^2}{4}$. 由现在的假设 $\sin U=\sqrt{\frac{u}{2v}}$ 作顺推. 因为 $\sin U=\frac{u}{w}$，所以有 $\sqrt{\frac{u}{2v}}=\frac{u}{w}$ 或 $\frac{u}{2v}=\frac{u^2}{w^2}$，所以有 $w^2=2uv$，最后得到 $\frac{uv}{2}=\frac{w^2}{4}$. 注意，三角形 UVW 已经是直角三角形.

证明 由假设 $\sin U=\sqrt{\frac{u}{2v}}$ 和正弦的定义 $\sin U=\frac{u}{w}$，故 $\sqrt{\frac{u}{2v}}=\frac{u}{w}$. 经过恒等变形得到 $\frac{uv}{2}=\frac{w^2}{4}$. 可见对这里的直角三角形 UVW 来说，是满足例1的假设的，因此，它是等腰三角形. //

(c) **证明概要** 为了验证三角形 UVW 满足例3的假设，将记号作对比，即是 $r=u$，$s=v$，$t=w$. 这就需要证明 $w=\sqrt{2uv}$. 像(b)的证明一样，有 $\sqrt{\frac{u}{2v}}=\frac{u}{w}$，所以有 $\frac{u}{2v}=\frac{u^2}{w^2}$

或 $w^2=2uv$，从而 $w=\sqrt{2uv}$.

证明 由假设 $\sin U=\sqrt{\frac{u}{2v}}$ 和正弦的定义 $\sin U=\frac{u}{w}$，得到 $\sqrt{\frac{u}{2v}}=\frac{u}{w}$，经过恒等变形，得到 $w=\sqrt{2uv}$. 可见对直角三角形 UVW 来说，例 3 的假设成立，从而推出它是等腰三角形. //

4

4.1	事物	性质	发生的事情
(a)	喜马拉雅山的山峰	高度超过 20000	比世界上其它山峰都高
(b)	整数 x	无	$x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$
(c)	直线 l'	通过 l 之外的点 P	l' 平行于 l
(d)	角 t	$0<t<\frac{\pi}{2}$	$\sin t=\cos t$
(e)	有理数 r, s	在 x 和 y 之间	$\|r-s\|<0.001$

4.2 (a) 如果在三角形 XYZ 中，∃两个边 ∋ 它们的长相等，那么三角形 XYZ 是等腰的.

(b) 给定 $\angle t$，$\exists\angle t'$ ∋ $\angle t'$ 的正切大于 $\angle t$的正切.

(c) 在 n 个人中，∃至少两个人∋他们有同样多的朋友.

(d) n 次多项式 $p(x)$∃恰好 n 个复根 $r_1\cdots\cdots r_n$∋$p(r_1)=\cdots=p(r_n)=0$.

4.3 证明概要 我们应该用构造法求一个 x 的值，使得 $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$. 由 2 次方程求根公式，$x$ 的值是:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{12}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\right)$$

即 x 的值是 1 或 3/2. 将 x 的值代入 $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$, 可以看到 2 次方程是满足的.

(a) **证明** 对 $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$, 用二次方程求根公式求得 $x=1$ 或 $\frac{3}{2}$, 所以存在整数 $x=1$, 使得 $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$, 这样的整数是唯一的. //

(b) **证明** 对 $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$, 用 2 次方程求根公式, 得到 $x=1$ 或 $x=\frac{3}{2}$, 所以存在实数 x, 使得 $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$, 这样的实数 x 不是唯一的. //

4.4 **证明概要** 顺推-倒推法提出的抽象问题是"怎样才能证明一个整数(即 a)整除另一个整数(即 c)?" 根据定义 1, 回答是证明存在整数 k, 使得 $c=ak$. 由于存在量词的出现,所以转向顺推过程来构造所求的 k.

由假设 $a|b$ 和 $b|c$, 根据定义 1, 存在整数 p 和 q, 使得 $b=ap$ 和 $c=bq$, 这就推出 $c=bq=(ap)q=a(pq)$. 可见所求的 $k=pq$.

证明 因为 $a|b$ 和 $b|c$, 由定义存在整数 p 和 q, 使得 $b=ap$ 和 $c=bq$, 于是 $c=bq=(ap)q=a(pq)$, 从而 $a|c$. //

4.5 **证明概要** 顺推-倒推法提出的抽象问题是:"怎样才能证明实数$\left(\text{即 }\frac{s}{t}\right)$是有理数?" 根据定义 11, 回答是证明存在整数 p 和 q, $q\neq0$, 使得 $\frac{s}{t}=\frac{p}{q}$. 由于存在量词的出现,所以转向顺推过程来构造所求的 p 和 q.

由 s 和 t 是有理数的假设,根据定义 11, 存在整数 a, b, c 和 d, 并且 $b\neq0$, $d\neq0$, 使得 $s=\frac{a}{b}$, $t=\frac{c}{d}$. 因为 $t\neq0$, 即 $c\neq$

0. 所以 $bc\neq0$. 于是 $\frac{s}{t}=\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{d}{c}\right)=\frac{ad}{bc}$。可见所求的整数 p 和 q 是 $p=ad$ 和 $q=bc$, 并且 $q=bc\neq0$.

证明 因为 s, t 是有理数, 根据定义 11, 存在整数 a, b, c, d, 并且 $b\neq0$, $d\neq0$, 使得 $s=\frac{a}{b}$ 和 $t=\frac{c}{d}$. 又 $t\neq0$, 故 $c\neq0$. 构造出 $p=ad$ 和 $q=bc$, 并且由 $q\neq0$, 有 $\frac{s}{t}=\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{d}{c}\right)=\frac{ad}{bc}=\frac{p}{q}$, 因而 $\frac{s}{t}$ 是有理数. //

5

5.1 (a) 事物: 实数 x.

性质: 无.

发生的事情: $f(x)\leqslant f(x^*)$.

(b) 事物: 元素 x.

性质: x 在 S 中.

发生的事情: $g(x)\geqslant f(x)$.

(c) 事物: 元素 x.

性质: x 在 S 中.

发生的事情: 对 S 中的所有 x, 有 $x\leqslant u$.

(d) 事物: 实数 ε.

性质: $\varepsilon>0$.

发生的事情: 存在 S 中的 x, 使 $x>u-\varepsilon$.

(e) 事物: 元素 x, y 和实数 t.

性质: x, y 在 C 中, 并且 $0\leqslant t\leqslant1$.

发生的事情: $tx+(1-t)y$ 是 C 中元素.

(f) 事物: 实数 x, y 和实数 t.

性质: $0\leqslant t\leqslant1$.

发生的事情：$f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$.

(g) 事物：实数 ε.

性质：$\varepsilon>0$.

发生的事情：存在一个实数 $\delta>0$，使得对所有具有性质 $|x-y|<\delta$ 的实数 y，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

(h) 事物：实数 ε.

性质：$\varepsilon>0$.

发生的事情：存在整数 k'，使得对所有整数 $k>k'$，有 $|x^{(k)}-x|<\varepsilon$.

5.2 (a) 令 x' 是实数，要证明 $f(x')\leqslant f(x^*)$.

(b) 令 x' 是 S 中的元素，要证明 $g(x')\geqslant f(x')$.

(c) 令 x' 是 S 中的元素，要证明 $x'\leqslant u$.

(d) 令 ε' 是实数，$\varepsilon'>0$，要证明存在 $x\in S$，使得 $x>u-\varepsilon'$

(e) 令 x', y' 是 C 中的元素，t' 是 0 和 1 之间的实数，要证明 $t'x'+(1-t')y'$ 是 C 中的元素.

(f) 令 x', y', t' 是实数，且 $0\leqslant t'\leqslant 1$，要证明 $f(t'x'+(1-t')y')\leqslant t'f(x')+(1-t')f(y')$.

(g) 令 ε' 是实数，且 $\varepsilon'>0$，要证明存在实数 $\delta>0$，使得对所有具有性质 $|x-y|<\delta$ 的实数 y，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon'$.

(h) 令 ε' 是实数，$\varepsilon'>0$，要证明存在整数 k'，使对所有整数 $k>k'$，有 $|x^{(k)}-x|<\varepsilon'$.

5.3 当用选择法证明“对所有具有某种性质的事物某件事情发生”时，是选择一个具有所说性质的事物，然后由这个性质出发作顺推以得到所说事情发生的结论. 确切地说，这正是利用顺推-倒推法证明“如果 x 是具有所说性质的事物，那么所说的事情发生”. 因为两种作法都是由同一个性质出发作顺推以及从要发生的同一件事情出发作倒推. 这说明，

包含量词"对所有的"这种命题能够转化为"如果…那么…"这种形式的等价命题.

5.4 (a) $\exists$一个山峰$\ni\forall$别的山峰，都有这个山峰高于别的山峰.

(b) $\forall$角t，有$\sin 2t=2\sin t\cos t$.

(c) $\forall$非负实数p和q，有$\sqrt{pq}\leqslant\frac{(p+q)}{2}$.

(d) $\forall$具有性质$x<y$的实数x，y，$\exists$有理数$r\ni x<r<y$.

5.5 (a) 首先用构造法构造一个$M>0$，然后用选择法在S中选择x'，对x'证明$|x'|\leqslant M$.

(b) 首先用选择法选择$M'>0$，然后用构造法构造一个$x\in S$，使得$|x|>M'$.

(c) 首先用选择法选择$\varepsilon'>0$，其次用构造法构造$\delta>0$，最后用选择法选择具有性质$|x'-y'|<\delta$的x'，y'，证明$|f(x')-f(y')|<\varepsilon'$.

5.6 **证明概要** 顺推-倒推法提出的抽象问题是"怎样才能证明一个集合(即T)是另一个集(即S)的子集合?"根据定义，回答是必须证明

B_1: 对所有T中的t，有t在S中.

在B_1中出现了量词"对所有的"应该用选择法选择T中一个元素t'，对它证明

B_2: t'在S中.

这只要证明t'满足S的规定性质，即证明

B_3: $(t')^2-3t'+2\leqslant 0$.

由t'在T中的事实也就是它满足T的规定性质出发作顺推. 我们得到

A_1: $1\leqslant t'\leqslant 2$

是真的．由此$(t'-1)\geqslant 0$，并且$(t'-2)\leqslant 0$，从而$(t')^2-3t'+2=(t'-1)(t'-2)\leqslant 0$，这就建立了$B_3$，完成了证明．

证明 为了证明$T\subseteq S$，令t'是T中的元素，要证明t'在S中．因为t'在T中，$1\leqslant t'\leqslant 2$，所以$t'-1\geqslant 0$并且$t'-2\leqslant 0$，由此有

$$(t')^2-3t'+2=(t'-1)(t'-2)\leqslant 0$$

从而t'在S中．//

5.7 证明概要 关键词"对每一个"出现在结论中，告诉我们应该用选择法．令x'是实数并且$x'>2$，为了构造出所求的y，我们需要

$$x'=\frac{2y}{1+y}$$

即

$$x'+x'y=2y$$

$$x'=2y-x'y=y(2-x')$$

$$y=\frac{x'}{2-x'}.$$

可见所求的y必须是$\frac{x'}{2-x'}$．容易验证对y的这个值有$x'=\frac{2y}{1+y}$，但还需要证明$y<0$．这是很明显的，因为$x'>2$．

证明 令$x'>2$，因此我们能够构造$y=\frac{x'}{2-x'}$．因为$x'>2$，所以$y<0$．容易验证$x'=\frac{2y}{1+y}$．//

5.8 证明概要 顺推-倒推法提出的抽象问题是"怎样才能证明函数是凸的？"用习题5.1(f)的定义，应该证明

B_1：对所有实数x，y和具有性质$0\leqslant t\leqslant 1$的所有实数t，有

$$f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y).$$

出现了量词"对所有的"告诉我们应该用选择法．因此，我们选择实数x'，y'和具有性质$0\leqslant t'\leqslant 1$的t'，来证明$f(t'x'+(1$

$-t')y')\leqslant t'f(x')+(1-t')f(y')$. 但是由假设

$$\begin{aligned}f(t'x'+(1-t')y')&=m(t'x'+(1-t')y')+b\\&=mt'x'+my'-mt'y'+b\\&=mt'x'+bt'+my'-mt'y'+b-bt'\\&=t'(mx'+b)+(1-t')(my'+b)\\&=t'f(x')+(1-t')f(y').\end{aligned}$$

可见所要求的不等式成立.

证明 为了证明 f 是凸的, 我们需要证明对所有实数 x, y 和所有具有性质 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的 t, 有

$$f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$$

令 x', y' 是实数, t' 具有性质 $0\leqslant t'\leqslant 1$, 则

$$\begin{aligned}f(t'x'+(1-t')y')&=m(t'x'+(1-t')y')+b\\&=mt'x'+my'-mt'y'+b\\&=t'(mx'+b)+(1-t')(my'+b)\\&=t'f(x')+(1-t')f(y')\end{aligned}$$

从而不等式成立. //

6

6.1 (a) 能用.

(b) 不能用. 因为命题中包含的量词是"存在", 而不是"对所有的".

(c) 能用.

(d) 能用.

(e) 不能用. 因为在这个命题中 n 是实数, 而归纳法只能对整数使用.

6.2 (a) 当命题 B 是"对每一个具有某种性质的事物有某件事情发生"这种形式时用选择法. 当上述命题中的事

物是整数而性质是大于某个开头的整数的情形用归纳法．在这种情形下所以能用归纳法，是因为当假定所说的事情对给定的 n 发生来证明对 $n+1$ 发生时，比起用选择法直接证明对给定的 n 所说的事情发生常常要容易些．

(b) 当事物不是整数时就不能用归纳法，因为证明了 $P(n)$ 推出 $P(n+1)$ 之后，却"跳过了"事物的许多值．对于这些值，命题并没有作为结果而被证明．

6.3 证明 首先我们证明 $P(n)$ 对 $n=1$ 是真的，就是用 1 代替 n 证明 $1(1!)=(1+1)!-1$．但这是明显的，因为 $1(1!)=1=(1+1)!-1$．

现在假设 $P(n)$ 是真的，并用它来证明 $P(n+1)$ 是真的．

$$P(n):\ 1(1!)+2(2!)+\cdots+n(n!)=(n+1)!-1$$

$$P(n+1):\ 1(1!)+2(2!)+\cdots+(n+1)(n+1)!=(n+2)!-1$$

利用 $P(n)$，将 $P(n+1)$ 的左端改写有

$$\begin{aligned}
&1(1!)+2(2!)+\cdots+n(n!)+(n+1)(n+1)!\\
&=[1(1!)+2(2!)+\cdots+n(n!)]+(n+1)(n+1)!\\
&=[(n+1)!-1]+(n+1)(n+1)!\\
&=(n+1)![1+(n+1)]-1\\
&=(n+1)!(n+2)-1\\
&=(n+2)!-1
\end{aligned}$$

可见 $P(n+1)$ 是真的，证明完成．//

6.4 证明 首先证明 $P(n)$ 对 $n=5$ 是真的，因为 $2^5=32$，$5^2=25$，所以 $2^5>5^2$，即对 $n=5$ 是真的．假设 $P(n)$ 是真的，我们要证 $P(n+1)$ 是真的．

$$P(n):\ 2^n>n^2$$

$$P(n+1):\ 2^{n+1}>(n+1)^2$$

利用 $P(n)$ 是真的来处理 $P(n+1)$ 左端，我们有

$$2^{n+1}=2(2^n)>2n^2$$

为了得到 $P(n+1)$，应该证明对 $n>5$ 有 $2n^2>(n+1)^2=n^2+2n+1$. 从两边减去 n^2，应该证明 $n^2>2n+1$. 这个命题对 $n=5$ 是真的(但对 $n=1$ 或 2 不真)，并且再一次用归纳法也能证明它对 $n>5$ 是真的. //

6.5 命题对有 1 个元素(设为 x)的集合是真的，因为它的子集合是 $\{x\}$ 和 $\emptyset$，即有 $2^1=2$ 个子集合. 假设对有 n 个元素的集合，其子集合的个数是 2^n. 我们来证明对有 $n+1$ 个元素的集合 S，它的子集合的个数是 2^{n+1}. 先列出由 S 的前 n 个元素组成的所有子集合，再将 S 的第 $n+1$ 个元素添到这些子集合中，就组成了 S 的所有子集合. 由归纳假设，前 n 个元素组成子集合有 2^n 个，这 2^n 个中的每一个都添加最后一个元素，又有 2^n 个子集合. 因此 S 的子集合数是 $2^n+2^n=2^{n+1}$. 这样命题对 $n+1$ 成立.

6.6 证明 设 $s=1+2+\cdots+n$

则 $$s=n+(n-1)+\cdots+1$$

两个等式相加得到

$$2s=n(n+1)$$

即有 $$s=\frac{n(n+1)}{2}$$

6.7 证明 验证 $n=1$，因为 $n^3-n=1-1=0$，而 $0=(6)(0)$，所以 6 整除 0. 假设命题对 $n-1$ 是真的，就有 6 整除 $(n-1)^3-(n-1)$，也就是对某个整数 k 有 $(n-1)^3-(n-1)=6k$. 我们需要证明对某个整数 m, $n^3-n=6m$. 为此将 $P(n)$ 与 $P(n-1)$ 联系起来，有

$$\begin{aligned}(n-1)^3-(n-1)&=n^3-3n^2+3n-1-n+1\\&=n^3-3n^2+2n\\&=n^3-n-(3n^2-3n)\end{aligned}$$

所以 $n^3-n=[(n-1)^3-(n-1)]+3n^2-3n$

根据归纳假设$(n-1)^3-(n-1)$能被6整除，故我们只要证明$3n^2-3n$也能被6整除，或者证明n^2-n能被2整除即可. 因为$n^2-n=n(n-1)$是两个相邻整数的积，n或$n-1$必有一个是偶数，所以得到$n(n-1)$能被2整除的结论. 由此，对某个整数p，有$3n^2-3n=6p$，从而有

$$\begin{aligned} n^3-n&=[(n-1)^3-(n-1)]+3(n^2-n)\\ &=6k+6p=6(k+p) \end{aligned}$$

这就得到了所求的$m=k+p$. ∎

6.8 (a) 验证对整数k命题是真的，然后假设命题对n是真的，证明它对$n-1$是真的.

(b) 验证对某个整数命题是真的，假设命题对n是真的，证明它对$n+1$是真的，并且它对$n-1$也是真的.

(c) 验证对$n=1$命题是真的，假设命题对$2n+1$是真的，证明它对$m+3$也是真的.

6.9 错误出在最后一句话，这句话是："因此这群马的颜色都是棕色的，从而这匹不知颜色的马也必定是棕色的." 问题是你怎么知道这群马是棕色的？实际上，当原有的$n+1$匹马恰好是2匹时，这群马只有一匹，就不一定是棕色的. 出现错误的原因是本应对开始的整数$n=2$进行验证而不是从$n=1$开始验证. 当然，对$n=2$是不可能证明的.

7

7.1 当量词"对所有的"在倒推过程中出现时，使用选择法；当量词"对所有的"在顺推过程中出现时，使用特殊化法. 换句话说，当需要证明"对具所有有某种性质的事物使得某件事情发生"时，使用选择法；当已经知道"对所有具有某种性质

的事物使得某件事情发生"时使用特殊化法.

7.2 (a) m 必须是一个$\geqslant 5$的整数, 如果是, 那么 $2^m >$ m^2.

(b) y 必须是 S 的一个元素, 并且$|y|<5$. 如果 y 是这样, 那么 y 是 T 的一个元素.

(c) ε' 必须 >0, 如果 $\varepsilon'>0$, 那么 $\exists\delta>0$, $\ni\forall$ 满足$|x-y|<\delta$ 的 y, 有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon'$.

(d) 四边形 $QRST$ 是矩形, 它的面积必须等于对角线长度平方的一半. 如果它是这样的, 那么它是正方形.

(e) 三角形 RST 的角 S 必须严格地在 0 与 $\frac{\pi}{4}$ 之间. 如果是这样, 那么 $\cos S>\sin S$.

7.3 **证明概要** 顺推-倒推法提出的抽象问题是:"怎样才能证明一个集合(即 R)是另一个集合(即 T)的子集合?"根据定义, 回答是证明

B_1: 对所有的 $r\in R$, 有 $r\in T$.

在倒推过程中出现量词"对所有的", 应该使用选择法, 所以选择一个 $r'\in R$, 利用这一信息和假设来证明 $r'\in T$.

转向顺推过程, 已经假设 R 是 S 的子集合, S 是 T 的子集合, 根据定义分别有

A_1: 对所有的 $r\in R$, 有 $r\in S$.

A_2: 对所有的 $s\in S$, 有 $s\in T$.

将 A_1 特殊化到 r' 上(它在 R 中), 有 $r'\in S$. 再将 A_2 特殊化到 r' 上($r'\in S$), 也有 $r'\in T$. 这就是 B_1, 证明完成.

证明 为了证明 R 是 T 的子集合, 我们证明对所有的 $r\in R$, 有 $r\in T$. 令 $r'\in R$, 根据假设 R 是 S 的子集合, 所以 $r'\in S$. 再根据假设 S 是 T 的子集合, 所以 $r'\in T$. //

7.4 **证明概要** 顺推-倒推法提出的抽象问题是:"怎样

才能证明一个集合(即 S 与 T 的交集合)是凸的?"根据定义,需要证明

B_1: 对所有 x, $y\in S\cap T$ 以及对所有 $0\leqslant t\leqslant 1$, 有 $tx+(1-t)y\in S\cap T$.

在倒推过程中,出现量词"对所有的"提示使用选择法.选择 S 与 T 的交集合中的 x' 和 y',以及满足 $0\leqslant t'<1$ 的 t', 证明

B_2: $t'x'+(1-t')y'\in S\cap T$.

由假设和上面的信息进行顺推,通过证明

$$t'x'+(1-t')y'\in S,\ t'x'+(1-t')y'\in T$$

便能够使 B_2 成立. 事实上,由题设 S 是凸的, 根据定义可得到

A_1: 对所有 x, $y\in S$ 和对所有 $0\leqslant t\leqslant 1$, 有 $tx+(1-t)y\in S$.

将这个命题特殊化到 x', y' 和 t' 上得到

$$t'x'+(1-t')y'\in S$$

类似的讨论可得到

$$t'x'+(1-t')y'\in T$$

这就完成了证明.

证明 为了证明 $S\cap T$ 是凸集合, 令 x', $y'\in S\cap T$ 以及 $0\leqslant t'<1$ 将证明

$$t'x'+(1-t')y'\in S\cap T$$

由假设 S 是凸集合,得到

$$t'x'+(1-t')y'\in S$$

同样也可得到

$$t'x'+(1-t')y'\in T$$

由此 $$t'x'+(1-t')y'\in S\cap T$$

所以 $S\cap T$ 是凸集合. //

7.5 证明概要 在结论中出现量词"对所有的"提示用选择法. 选择一个实数 $s'\geqslant 0$, 证明函数 $s'f$ 是凸的, 相应的抽象问题是"怎样才能证明一个函数(即 $s'f$)是凸的?"利用在习题 5.1(f)中的定义, 回答是证明

B_1: 对所有实数 x 和 y, 以及所有满足 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的 t 有,

$$s'f(tx+(1-t)y)\leqslant ts'f(x)+(1-t)s'f(y).$$

在倒推过程中出现量词"对所有的"提示使用选择法, 选择实数 x' 和 y' 以及 $0\leqslant t'\leqslant 1$, 对于它们证明

B_2: $s'f(t'x'+(1-t')y')\leqslant t's'f(x')+(1-t')s'f(y')$

由假设 f 是凸函数进行顺推可得到所要结果. 根据习题 5.1 (f)中的定义, 我们知道

A_1: 对所有实数 x 和 y, 以及对所有 $0\leqslant t\leqslant 1$, 有

$$f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$$

将这个命题特殊化到 x', y' 和 t' 上(注意 $0\leqslant t'\leqslant 1$), 得到

A_2: $f(t'x'+(1-t')y')\leqslant t'f(x')+(1-t')f(y')$

在 A_2 的不等式两边乘以非负数 s', 得到所希望的命题 B_2, 于是证明完成.

证明 为了证明 $s'f$ 是凸的, 令 x' 和 y' 为实数, 又令 $0\leqslant t'\leqslant 1$, 将证明

$$s'f(t'x'+(1-t')y')\leqslant t's'f(x')+(1-t')s'f(y')$$

因为假设 f 是凸的, 根据定义有

$$f(t'x'+(1-t')y')\leqslant t'f(x')+(1-t')f(y')$$

用非负数 s' 乘这个不等式的两边就得到所希望的结果. //

7.6 证明概要 顺推-倒推法提出抽象问题:"怎样才能证明一个集合(即 C)是凸的?"运用习题 5.1(e)中的定义, 回答是证明

B_1: 对所有的 x, $z\in C$ 及对所有 $0\leqslant t\leqslant 1$, 有

$$tx+(1-t)z\in C$$

倒推过程中出现量词"对所有的"提示用选择法，选择 x', $z'\in C$, $0\leqslant t'\leqslant 1$，利用这些信息和假设来证明

B_2: $t'x'+(1-t')z'\in C$

这需要证明 $t'x'+(1-t')z'$ 满足 C 的规定性质，即证明

B_3: $f(t'x'+(1-t')z')\leqslant y$

转到顺推过程，由题设 f 是一个凸函数，根据习题5.1(f)中的定义有

A_1: 对所有的 x 和 z，及对所有 $0\leqslant t\leqslant 1$，有

$$f(tx+(1-t)z)\leqslant tf(x)+(1-t)f(z)$$

顺推过程中出现量词"对所有的"，将使用特殊化法．将 A_1 特殊化到 x', z' 和 t' 上（注意 $0\leqslant t'\leqslant 1$），得到

A_2: $f(t'x'+(1-t')z')\leqslant t'f(x')+(1-t')f(z')$

最后，为了得到 B_3，我们利用 x' 和 $z'\in C$ 这个事实，也就是它们满足 C 的规定性质，于是 $f(x')\leqslant y$, $f(z')\leqslant y$．所以，由 A_2 有

$$\begin{aligned}f(t'x'+(1-t')z')&\leqslant t'f(x')+(1-t')f(z')\\&\leqslant t'y+(1-t')y=y\end{aligned}$$

可见 B_3 是真的，证明完成．

证明　为了证明 C 是凸的，令 x', $z'\in C$，以及 t' 满足 $0\leqslant t'\leqslant 1$，所以 $f'(x')\leqslant y$, $f(z')\leqslant y$．由假设 f 是凸函数，所以

$$\begin{aligned}f(t'x'+(1-t')z')&\leqslant t'f(x')+(1-t')f(z')\\&\leqslant t'y+(1-t')y=y\end{aligned}$$

因此，$t'x'+(1-t')z'\in C$．//

7.7　证明概要　顺推–倒推法提出抽象问题："怎样才能证明一个数（即 1）是一个集合（即 S）的最小上界？"运用习题5.1(d)中的定义，回答是证明：

B_1: 1 是集合 S 的一个上界，并且对于所有 $\varepsilon>0$，存在

$x\in s$, 使得 $x>1-\varepsilon$.

为了证明 B_1 的第一部分是真的，提出抽象问题“怎样才能证明一个数(即 1)是一个集合(即 S)的上界?”再运用习题 5.1(c)中的定义，回答是证明

B_2: 对所有的 $x\in S$, 有 $x\leqslant 1$.

倒推过程中出现量词“对所有的”，应该用选择法，选择 S 中的一个元素 x, 对它证明

B_3: $x\leqslant 1$.

为了建立 B_3, 我们现在利用 $x\in S$ 的事实，为此，注意到 S 能够被写成以下形式

$$S=\left\{\text{实数 } x\text{: 存在整数 } n\geqslant 2\text{, 使得 } x=1-\frac{1}{n}\right\}$$

因为 $x\in S$, 所以存在一个整数 $n\geqslant 2$, 使 $x=1-\frac{1}{n}$. 由于 $n\geqslant 2$, $x=1-\frac{1}{n}\leqslant 1$, 这样 B_3 是真的.

回到 B_1, 我们还要证明

B_4: 对所有 $\varepsilon>0$, 存在 $x\in S$, 使得 $x>1-\varepsilon$.

再利用选择法选择一个 $\varepsilon>0$, 对于这个 ε 必须证明

B_5: 存在 $x\in S$, 使得 $x>1-\varepsilon$.

再运用顺推过程，只要求出一个大于等于 2 的整数 n, 并且 $1-\frac{1}{n}>1-\varepsilon$, 就能够构造出所要求的 $x\in S$, 因为可令 $x=1-\frac{1}{n}$. 所要求的大于等于 2 的整数可以是任何一个大于等于 2 及大于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的，因为对这样的 n 必有 $1-\frac{1}{n}>1-\varepsilon$. 于是证明完成.

证明 为了证明 1 是 S 的上界，令 $x\in S$, 则存在整数 $n\geqslant 2$, 使得 $x=1-\frac{1}{n}$. 由此 $x\leqslant 1$, 因而 1 是 S 的上界. 为了

完成这个证明，令 $\varepsilon>0$，应该在 S 中构造一个元素 x，使 $x>1-\varepsilon$. 这只要令 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，$n\geqslant 2$，就有 $x=1-\frac{1}{n}$ 满足 $x>1-\varepsilon$. //

8

8.1 (a) 假设：l，m 和 n 是三个相邻的整数，并且 24 整除 $l^2+m^2+n^2+1$.

(b) 假设：矩阵 M 是非奇异的，并且 M 的行向量组是线性相关的.

•(c) 假设：f 和 g 是两个函数，使得 $g\geqslant f$，f 没有上界，g 有上界.

8.2 (a) 素数的个数不是有限的.

(b) 某些实数组成的集合 S 不是有界的.

(c) 正整数 p 不能被不是 1 和 p 的正整数整除.

(d) 直线 l 和直线 l' 不相交.

(e) 实数 x 不大于等于 5.

8.3 **证明概要** 为了使用矛盾法，我们假设：

A：n 是一个整数，并且 n^2 是偶数.

非 B：n 不是偶数，即 n 是奇数.

由这些假设出发作顺推，用奇数的定义来推出 n^2 是奇数的矛盾. 因为存在整数 k，使得 $n=2k+1$，于是

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$$

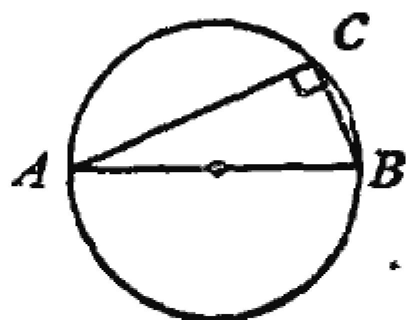
这就有 $n^2=2p+1$. 此处，$p=2k^2+2k$，由此 n^2 是奇数. 这个矛盾断定了所证的结论是成立的.

证明 假设结论不成立，n^2 是偶数而 n 是奇数，则存在整数 k，使得 $n=2k+1$，由此

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$$

从而 n^2 是奇数，这与假设矛盾. //

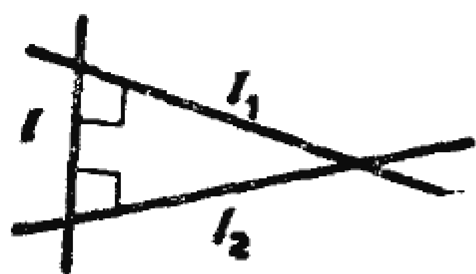
8.4 **证明概要** 假设存在一个圆，它有一个弦的长大于它的直径长，从这个假设入手，并利用圆的性质来推出一个矛盾.



令 AC 是这个圆的一条弦. 它的长大于这个圆的直径长. 再令 AB 是这个圆的直径. 这个作图是正确的，根据定义，直径是通过圆心端点在圆周上的直线段. 因为 $\angle ACB$ 是 $90°$（它是半圆上的一个角），所以三角形 ABC 是直角三角形，AB 是它的斜边. 但是直角三角形的斜边不可能比它的另一边短，于是得到矛盾.

证明 假设存在一个圆，它有一条弦的长大于直径长，不妨设弦为 AC. 我们作一条直径，使它的一个端点与弦的一个端点 A 重合. 如果我们联上另外的两个端点，那么就得到一个以直径 AB 为斜边的直角三角形，所以 $\overline{AB}>\overline{AC}$，这与我们所作的假设矛盾. //

8.5 **证明概要** 当使用矛盾法时，我们假设直线 l_1 和 l_2 都与同平面内的第三条直线 l 垂直，但它们不平行. 进行顺推，我们便断定它们相交，所以三条直线 l_1, l_2 和 l 组成一个三角形. 因为三角形的三内角和是 $180°$，这里有两个角是 $90°$，所以，第三个角只能是 $0°$，这就得出了矛盾.



证明 假设 l_1 和 l_2 不平行，并且它们都与同一直线 l 垂直. 所以 l_1 与 l_2 一定相交，组成一个三角形，其中有两个角是 $90°$. 因为三角形的三内角和为 $180°$，所以我们得到第三个角为 $0°$ 的结论. 这是一个矛盾. //

8.6 **证明概要** 为了使用矛盾法，假设不存在朋友数相同的人，也就是所有人的朋友数都不同. 由于有 n 个人，他们

的朋友数都不同，我们可以按朋友数递增的顺序列出每一个人，换句话说

第1人没有朋友

第2个人有1个朋友

第3个人有2个朋友

························

第n个人有$n-1$个朋友.

这列在最后的人将是另外$n-1$个人的朋友，包括没有朋友的第1个人．这就推出了矛盾[1]．

证明 假设结论不成立，即没有朋友数相同的人，对团体中的每个人可以用以下方法编号

第1个人没有朋友

第2个人有1个朋友

第3个人有2个朋友

························

第n个人有$n-1$个朋友.

由此有$n-1$个朋友的人是没有朋友的人的朋友，便得出矛盾．//

---

1) 严格地说，证明概要中"换句话说"之后应改成：

第1个人有k_1个朋友

第2个人有k_2个朋友

························

第n个人有k_n个朋友，

其中$k_1, k_2, \cdots, k_n$是非负整数，并且有

$$k_1<k_2<\cdots<k_n.$$

当$k_1=0$时，$k_n \geqslant n-1$，这列在最后的人至少是另外$n-1$个人的朋友，包括没有朋友的第1个人．这就推出了矛盾．当$k>0$时，$k_n \geqslant n$，这列在最后的人至少有n个朋友，但团体中最多只有$n-1$个人是他的朋友．这也推出了矛盾．

下面的证明也应作类似的修改．

——译者

8.7 **证明概要** 用矛盾法，假设存在三个相邻的整数 $n-1$，n 和 $n+1$，使得最大一个数的立方等于其余两个数的立方和. 通过证明没有整数满足这个方程，我们能够得到一个矛盾. 明确地说，我们有

$$(n-1)^3+n^3=(n+1)^3$$

即 $$n^3-3n^2+3n-1+n^3=n^3+3n^2+3n+1$$

即 $$n^3-6n^2-2=0$$

即 $$n^2(n-6)=2$$

但是，对于 $n\leqslant 6$，有 $n^2(n-6)\leqslant 0$，而对于 $n>6$，有 $n^2(n-6)>2$. 所以不存在整数 n，使 $n^2(n-6)=2$.

证明 假设 $n-1$，n 和 $n+1$ 是三个相邻的整数，使得 $(n-1)^3+n^3=(n+1)^3$

那么 $$n^3-3n^2+3n-1+n^3=n^3+3n^2+3n+1$$

即 $$n^3-6n^2=2$$

即 $$n^2(n-6)=2$$

但是，对于 $n\leqslant 6$，有 $n^2(n-6)\leqslant 0$. 对于 $n>6$，有 $n^2(n-6)>2$. 所以不存在整数 n，使 $n^2(n-6)=2$. //

8.8 **证明概要** 用矛盾法，假设素数个数是有限的，那么有一个素数比另外所有的素数都大，令 n 是这样的素数. 考虑 $n!+1$，再令 p 是能够整除 $n!+1$ 的任意素数，将通过证明 $p\leqslant n$ 和 $p>n$ 来得到一个矛盾.

因为 n 是最大的素数，所以 $p\leqslant n$. 又因为 p 是素数，$p\neq 1$. 所以由 p 整除 $n!+1$，可以证明 $p\neq 2,\cdots,p\neq n$，从而得到 $p>n$. 事实上，当 $n!+1$ 被 2 除时，余数是 1，因为 $n!+1=n(n-1)\cdots(2)(1)+1$.

同样，当 $n!+1$ 被 r 除时 $(1<r\leqslant n)$，余数也是 1. 由此

$$\frac{n!+1}{r}=\frac{n!}{r}+\frac{1}{r}$$

所以 $n!+1$ 没有在 1 和 n 之间（包括 n）的素因子，但是假设它有素因子 p，所以应有 $p>n$，这与假设 n 是最大的素数相矛盾.

证明 假设结论不成立，素数的个数是有限的. 令 n 是最大的素数，第么 $n!+1$ 不是素数，因为 $n!+1>n$. 所以 $n!+1$ 有一个素数因子 p 小于或等于 n，但是 $p\neq 1$，$n!+1$ 不能被 2 到 n 的任何一个数整除. 所以 $p>n$. 因此，我们推出一个矛盾. //

8.9 (a) 使用构造法. 构造一个元素 $s\in S$，证明 s 在 T 中.

(b) 按以下顺序使用选择法和矛盾法. 在 S 中选择 s'，断定在 T 中不存在 t，使得 $s'>t$. 为了得到这个结论，使用矛盾法. 假设有一个 $t\in T$，使得 $s'>t$，然后推出一个矛盾.

(c) 使用矛盾法. 假设存在一个 $M>0$，使得对所有 $x\in s$，都有 $|x|<M$，再推出一个矛盾.

9

9.1 (a) 着手进行顺推的命题：n 是奇数.

应该推出的命题：n^2 是奇数.

(b) 着手进行顺推的命题：S 是 T 的一个子集合，T 是有界的.

应该推出的命题：S 是有界的.

(c) 着手进行顺推的命题：$f(x)=f(y)$.

应该推出的命题：$x=y$.

(d) 着手进行顺推的命题：矩阵 M 的行向量是线性相关的.

应该推出的命题：M 是奇异的.

9.2　命题(b)是顺推过程的一个结果，因为假设是在0与$\frac{\pi}{4}$之间存在一个实数t，使得$\sin t=r\cos t$. 将上式两边平方，就得到(b).

9.3　用换质位法时，我们应该从非B着手进行顺推，并从非A进行倒推.

(a) 不正确. 因为抽象过程不能应用在非B上. 这个抽象问题也出现了所给题目的特殊符号.

(b) 不正确. 因为抽象问题中出现了所给题目的特殊符号.

(c) 不正确. 因为抽象过程不能应用在非B上.

(d) 正确.

9.4　证明概要　用换质位法，假设方程$n^2+n-c=0$有奇数解，不妨设为m. 必须证明c不是奇数，即c是偶数. 但是，由m满足这个方程能够得到$c=m+m^2$. 为了证明c是一个偶数，注意到m是奇数，从而m^2也是奇数(见习题3.5)，所以$c=m+m^2=$奇数$+$奇数$=$偶数. 证明完成.

证明　假设方程$n^2+n-c=0$有一个奇数解，不妨设为m，将证明c不是奇数. 但是$c=m+m^2$，由于m是奇数，$m+m^2$是偶数，所以c是偶数. //

9.5　证明概要　在结论中出现量词"对所有的"提示使用选择法. 选择实数x和y，并且$x\neq y$，对于它们必须证明

B_1: $f(x)\neq f(y)$

B_1是熟悉命题的否定，提示要用矛盾法或换质位法. 这里采用换质位法. 假定$f(x)=f(y)$，必须证明$x=y$. 为了得到所希望的结论，从$f(x)=f(y)$进行顺推，即从$mx+b=my+b$进行顺推，将等式的两边都减去$my+b$，得到

$$m(x-y)=0,$$

据题设 $m\neq 0$, 由此可得

$$x-y=0$$

所以 $$x=y.$$

证明 假设 x 和 y 都是实数, 并且 $f(x)=f(y)$, 证明 $x=y$. 但是由 $f(x)=f(y)$ 可得 $mx+b=my+b$, 或者 $m(x-y)=0$. 由题设 $m\neq 0$, 得到所要求的结论 $x=y$. //

9.6 **证明概要** 用换质位法, 假设四边形 $RSTU$ 不是矩形, 必须证明它有一个角为钝角. 出现了量词"存在"(即"有")提示我们转到顺推过程去产生所希望的钝角.

顺推下去, 能断定四边形至少有一个角不是 90°, 不妨设这个角是 $\angle R$. 如果 $\angle R$ 大于 90°, 那么 R 就是所希望的角, 否则, $\angle R$ 比 90° 小, 就意味着四边形剩下的角加起来一定大于 270°(因为 $RSTU$ 的所有角的和是 360°), 在和大于 270° 的三个角中, 一定有一个大于 90°. 那么这个角就是所希望的钝角.

证明 假设四边形 $RSTU$ 不是矩形, 因此, 它的四个角中必有一个设为 $\angle R$ 不是 90°, 于是将找到一个钝角. 如果 $\angle R$ 大于 90°, 那么它就是所希望的角. 否则, 这剩下的三个角加起来大于 270°, 所以这剩下的三个角中的一个是钝角. //

10

10.1 (a) 设 $f(x)$ 是函数, x^* 是实数. 如果存在一个实数 x, 使得 $f(x)>f(x^*)$, 那么实数 x^* 不是函数 f 的最大值点.

(b) 设 f 和 g 是单变量函数, S 是某些实数组成的集合. 如果在 S 中存在一个元素 x, 使得 $g(x)<f(x)$, 那么在集合 S 上不是 $g\geqslant f$.

(c) 设 S 是某些实数组成的集合，u 是实数，如果在 S 中存在一个元素 x，使得 $x>u$，那么实数 u 不是集合 S 的上界.

(d) 如果 u 不是某些实数组成的集合 S 的上界，或者存在一个实数 $\varepsilon>0$，使得对所有 $x\in S$ 有 $x\leqslant u-\varepsilon$，那么实数 u 不是集合 S 的一个最小上界.

(e) 如果在某些实数组成的集合 C 中存在 x, y，并且存在实数 t, $0\leqslant t\leqslant 1$，使得 $tx+(1-t)y$ 不是 C 中的元素，那么集合 C 不是凸的.

(f) 如果存在实数 x, y 和 t, $0\leqslant t\leqslant 1$，使得

$$f(tx+(1-t)y)>tf(x)+(1-t)f(y)$$

那么单变量函数 f 不是凸的.

(g) 如果存在实数 $\varepsilon>0$，使得对所有的实数 $\delta>0$，都存在 y，y 具有性质 $|x-y|<\delta$，使得 $|f(x)-f(y)|>\varepsilon$. 那么单变量函数 f 在点 x 处不连续.

(h) 设 x, $x^{(1)}$, $x^{(2)}\cdots$ 是实数，如果存在一个实数 $\varepsilon>0$，对任意的整数 k' 存在一个整数 $k>k'$，使得 $|x^{(k)}-x|>\varepsilon$，那么数列 $x^{(1)}$, $x^{(2)}\cdots$ 不收敛于 x.

10.2 (a) S 中不存在元素 x，使得 x 不在 T 中.

(b) 对于每一个在 0 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间的角 t，使得 $\sin t\neq\cos t$ 是不真的。

(c) 不存在一个"事物"具有"某种性质"，使得"某件事情"不发生。

(d) 对每一个具有某种性质的"事物"，"某件事情"不发生，这不是真的.

10.3 (a) 假设存在一个整数 $n\geqslant 4$，使得 $n!\leqslant n^2$。

(b) 假设是：A，非 B 并且非 C.

(c) 假设是：A，非 B 或者非 C.

(d) 假设 f 是一个单变量凸函数，x^* 是一个实数，存在一个实数 $\delta>0$，使得对所有具有性质 $|x-x^*|<\delta$ 的实数 x，有

$$f(x)\geqslant f(x^*)$$

再假设存在一个实数 y，使得 $f(y)<f(x^*)$.

10.4 (a) 从下面命题出发顺推：(非 B)并且(非 C).

从下面命题出发倒推：非 A.

(b) 从下面命题出发顺推：(非 B)或者(非 C).

从下面命题出发倒推：非 A.

(c) 从下面命题出发顺推：mn 不被 4 整除，并且 n 被 4 整除.

从下面命题出发倒推：n 是奇数，或者 m 是偶数.

10.5 **证明概要** 用矛盾法时，假设 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$，$x+y=0$，并且假设 $x\neq0$ 或者 $y\neq0$. 首先假设 $x\neq0$，因而从 $x\geqslant0$ 一定有 $x>0$，通过证明 $y<0$，而得到与 $y\geqslant0$ 相矛盾. 明确地说，因为 $x+y=0$，所以 $y=-x$. 但是，$-x<0$，从而得到了一个矛盾. 类似地，假设 $y\neq0$ 也得到矛盾.

证明 假设 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$，$x+y=0$，并且 $x\neq0$ 或者 $y\neq0$. 如果 $x\neq0$，那么 $x>0$，且 $y=-x<0$，但是这与 $y\geqslant0$ 相矛盾. 类似地如果 $y\neq0$，那么 $y>0$，且 $x=-y<0$，这与 $x\geqslant0$ 相矛盾. //

11

11.1 **证明概要** 使用第一种唯一性法，这里必须首先构造实数 y. 而这已经在习题 5.7 中作过了. 剩下的是假设 y 和 z 是两个实数，并且 $y<0$，$z<0$，$x=\frac{2y}{1+y}$，$x=\frac{2z}{1+z}$，

进行顺推，经过恒等变换来证明 $y=z$. 具体地说，令

$$x=\frac{2y}{1+y}=\frac{2z}{1+z}$$

则
$$y+yz=z+yz$$

两边都减去 yz，就得到所希望的结果，即

$$y=z.$$

证明 在习题5.7中已断定实数 y 的存在，只证 y 是唯一的. 假设 y 和 z 满足 $y<0$, $z<0$, $x=\frac{2y}{1+y}$, $x=\frac{2z}{1+z}$，于是

$$\frac{2y}{1+y}=\frac{2z}{1+z}$$

所以 $y+yz=z+yz$，或者 $y=z$. 这就是所要求证的. //

11.2 **证明概要** 依照第二种唯一性法，我们必须首先构造一个实数 x，使得 $mx+b=0$. 因为已假设 $m\neq0$，所以

$$mx+b=m\left(-\frac{b}{m}\right)+b=-b+b=0$$

所求的 x 便是 $-\frac{b}{m}$.

为了证明唯一性，假设 x 和 y 满足 $mx+b=0$ 和 $my+b=0$，并且 $x\neq y$. 通过证明 $m=0$ 可得到一个矛盾. 说得详细一点，因为 $mx+b=0=my+b$，所以 $m(x-y)=0$，两边除以非零数 $x-y$，就得到 $m=0$.

证明 构造一个数 x，使得 $mx+b=0$. 令 $x=\frac{-b}{m}$(注意：$m\neq0$)，那么

$$mx+b=m\left(-\frac{b}{m}\right)+b=0$$

现在假设 $y\neq x$，且满足 $my+b=0$. 那么，$mx+b=my+b$，所以 $m(x-y)=0$. 但因为 $x-y\neq0$，所以有 $m=0$. 这与

假设 $m\neq 0$ 矛盾. //

11.3 **证明概要** 首先证明存在性. 为了构造所需要的复数 $c+di$, 使它满足

$$(a+bi)(c+di)=1$$

令

$$c=\frac{a}{a^2+b^2},\quad d=\frac{-b}{a^2+b^2}$$

(注意: 分母不为 0, 因为已假设 a 或 b 至少有一个不为 0.)
则有

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(bc+ad)i$$
$$=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}+0i=1$$

下面证明唯一性. 假设 $e+fi$ 是另一个复数, 也满足 $(a+bi)(e+fi)=1$. 要证

$$c+di=e+fi$$

用 $e+fi$ 乘上面等式的两边, 得到

$$(e+fi)(a+bi)(c+di)=e+fi \tag{1}$$

因为 $(e+fi)(a+bi)=1$, 所以 $c+di=e+fi$.

证明 因为 a, b 至少有一个不为 0, 所以 $a^2+b^2\neq 0$. 可以构造一个复数: $c+di$, 其中 $c=\frac{a}{a^2+b^2}$, $d=\frac{-b}{a^2+b^2}$. 那么

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(bc+ad)i=1$$

下面证唯一性. 假设 $e+fi$ 也满足

$$(a+bi)(e+fi)=1$$

两边乘以 $e+fi$, 得到

$$(e+fi)(a+bi)(c+di)=(e+fi)$$

所以 $c+di=e+fi$. 唯一性得证. //

11.4 优点: 可以从三个命题, 就是 A, 非 B 和非 C 出发顺推. 若用互斥法, 只能从二个命题出发顺推.

缺点：不能进行倒推，因为不知道将得到什么样的矛盾．若用互斥法，可以从命题 B 或 C 着手进行倒推．

11.5 **证明概要** 用互斥法，我们假设 n 是偶数，m 是奇数，并且 4 整除 n，得到 4 整除 mn 的结论．

进行倒推时提出抽象问题"怎样才能证明一个整数（即 4）整除另一个整数（即 mn）？"用定义来回答是必须证明存在一个整数 k，使得 $mn=4k$．

转向顺推，我们必须构造这样的 k，因为 m 是奇数，存在整数 j，使得 $m=2j+1$．因为 4 整除 n，存在整数 p，使得 $n=4p$，由此

$$mn=(2j+1)(4p)=4(2jp+p)$$

所构造的 k 应该是 $k=2jp+p$．

证明 假设 n 是偶数，m 为奇数，并且 4 整除 n，要证明 4 整除 mn，即证明存在一个整数 k，使得 $mn=4k$．但因为 m 是奇数，存在一个整数 j，使得 $m=2j+1$．因为 4 整除 n，存在一个整数 p，使得 $n=4p$．这样一来就有

$$mn=(2j+1)(4p)=4(2jp+p)$$

所以所需要的整数是 $k=2jp+p$．证明完毕．//

注意，这个证明还可以这样做：假设 n 是偶数，m 是奇数，并且 4 不整除 mn，来推出 4 不整除 n．

11.6 (a) 如果 x 为实数，并且满足 $x^3+3x^2-9x-27\geqslant 0$，那么 $x\leqslant -3$，或者 $x\geqslant 3$．

(b) **证明概要** 根据互斥法，我们可设 $x^3+3x^2-9x-27\geqslant 0$，并且 $x>-3$，从而证明 $x\geqslant 3$．因为

$$x^3+3x^2-9x-27=(x-3)(x+3)^2\geqslant 0$$

而 $x>-3$，$(x+3)^2$ 是正数．所以 $x-3\geqslant 0$，即 $x\geqslant 3$．

证明 设 $x^3+3x^2-9x-27\geqslant 0$，并且 $x>-3$，那么

$$x^3+3x^2-9x-27=(x-3)(x+3)^2\geqslant 0$$

由于 $x>-3$，$(x+3)^2$ 是正的，所以 $x-3\geqslant 0$，即 $x\geqslant 3$. //

(c) 假设 $x<3$，证明 $x\leqslant -3$，其余的类似于(b)

11.7 (a) 对 S 中所有元素 s(即 $s\in S$)有 $s\leqslant x$.

(b) 在 S 中存在元素 s，使得 $s\geqslant x$.

(c) 存在一个 x，具有性质 $ax\leqslant b$，$x\geqslant 0$，使得 $cx\leqslant u$.

(d) 存在一个 x，具有性质 $ax\geqslant b$，$x\geqslant 0$，使得 $cx\geqslant u$.

(e) 对所有适合 $b\leqslant x\leqslant c$ 的 x，有 $ax\geqslant u$.

(f) 对所有适合 $a\leqslant x\leqslant c$ 的 x，有 $bx\leqslant u$.

11.8 **证明概要** 用极大-极小法，将结论转化成与之等价的有量词的命题 B.

B：对所有 $s\in S$，有 $s\geqslant t^*$.

在倒推过程中，出现量词"对所有的"，提示使用选择法. 选择 $s'\in S$，对于这个 s' 证明

B_1：$s'\geqslant t^*$.

通过进行顺推和用特殊化法可以得到所需要的结论. 详细地说，因为 S 是 T 的一个子集合，推出

A_1：对所有 $s\in S$，有 $s\in T$.

将 A_1 特殊化到 $s=s'$ 上($s'\in S$)，则 $s'\in T$. 根据假设有

A_2：对 T 中所有的 t，有 $t\geqslant t^*$.

再将 A_2 特殊化到 $t=s'$ 上($s'\in T$)，就有 $s'\geqslant t^*$. 证明完成.

证明 为了得到结论，令 $s'\in S$，要证明 $s'\geqslant t^*$. 由假设 S 是集合 T 的子集合，所以有 $s'\in T$. 于是，再由假设就得到 $s'\geqslant t^*$. //

11.9 **证明概要** 用极大-极小法将结论转化为与之等价的有量词的命题 B.

B_1：对所有适合 $ax\geqslant b$ 和 $x\geqslant 0$ 的 x，所有适合 $ua\leqslant c$ 和 $u\geqslant 0$ 的 u，有 $cx\geqslant ub$.

倒推过程中出现量词"对所有的"，提示选择适合 $ax'\geqslant b$ 的 $x'\geqslant 0$. 再选择适合 $u'a\leqslant c$ 的 $u'\geqslant 0$. 对于这样的 x' 和 u' 必须证明 $cx'\geqslant u'b$. 为达到此目的，将证明 $cx'\geqslant u'ax'$ 和 $u'ax'\geqslant u'b$. 详细地说，用非负数 x' 乘不等式 $u'a\leqslant c$ 的两边，便得到 $cx'\geqslant u'ax'$，类似地，用非负数 u' 乘不等式 $ax'\geqslant b$ 的两边便得到 $u'ax'\geqslant u'b$. 证明完成.

证明 为了得到所需要的结论，令 $x'\geqslant 0$，并且 $ax'\geqslant b$. 又令 $u'\geqslant 0$，并且 $u'a\leqslant c$. 那么 $u'ax'\geqslant u'b$，并且 $cx'\geqslant u'ax'$. 所以，$cx'\geqslant u'ax'\geqslant u'b$. 于是证明完成. //

12

12.1 (a) 换质位法或矛盾法. 因为在结论中出现否定词.

(b) 归纳法. 因为对于 $n\geqslant 4$ 的每一个整数 n 命题 B 是真的.

(c) 顺推-倒推法. 因为 B 没有特别的形式.

(d) 最大-最小法. 因为在 B 中出现词"最大".

(e) 唯一性法. 因为是证明有且只有一条直线.

(f) 矛盾法或换质位法. 因为在结论中出现否定词.

(g) 顺推-倒推法. 因为 B 没有特别的形式.

(h) 选择法. 因为在 B 中第一个量词是"对每一个".

(i) 构造法. 因为在 B 中第一个量词是"存在".

12.2 (a) 使用归纳法时，我们假设 $n!>n^2$, $n\geqslant 4$，并试图证明 $(n+1)!>(n+1)^2$. 当然，我们还要证明 $4!>4^2$.

(b) 使用选择法，我们选择一个整数 n'，使 $n'\geqslant 4$，并试图证明 $(n')!>(n')^2$.

(c) 将命题转化成"如果…那么…"的形式，我们得到"如

果 n 是一个整数，并且≥4，那么 $n!>n^2$”．于是，我们假设 n 是大于等于 4 的整数，并试图证明 $n!>n^2$．

(d) 用矛盾法，我们假设存在一个整数 $n\geqslant 4$，使得 $n!\leqslant n^2$，并试图推出一个矛盾．

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学思想方法入门——怎样理解证明和作出证明
作者＝（美）Ｄ 索罗
页数＝１４６
ＳＳ号＝１００６８２５１
出版日期＝１９８８年０８月第１版